Devoir maison n° 15
MP
pour mardi 18 mars 2025

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = (x^2+y^2-3)^2 + 4y^2 - 8$$

1. Montrer que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
3. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou autre).

Exercice 2 – ↯

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On note E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

On note $\|.\|$ la norme associée et $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de E.

1. Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $v_1, \ldots, v_n$ ses vecteurs colonnes.
   (a) Exprimer en fonction des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ les coefficients de la matrice $M^\top M$.
   (b) Dans le cas particulier où les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux, démontrer que
   $$|\det(M)| = \|v_1\|\|v_2\| \ldots \|v_n\|$$
2. Déterminer les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

— tous les coefficients de M sont dans $\{-1, 1\}$

— les vecteurs colonnes de la matrice M sont orthogonaux deux à deux.

Par exemple, on pourra constater que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_4$$

3. Écrire une fonction en Python qui lorsqu'elle prend en entrée la liste des colonnes d'une matrice M, de taille n, renvoie 1 si la matrice est dans $\mathcal{H}_n$ et 0 sinon.
4. Soit $M \in \mathcal{H}_n$.
   (a) Quelle est la norme d'un vecteur colonne de M ?
   (b) Que vaut $|\det(M)|$?
5. Soit $M \in \mathcal{H}_n$. On suppose que le premier vecteur colonne de M est le vecteur

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Soit, pour i dans $[\![2, n]\!]$, $v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{j,i} e_j$ le i-ième vecteur colonne de M. Démontrer que le nombre des $m_{j,i}$ égaux à 1 est égal au nombre de $m_{j,i}$ égaux à -1.
6. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est non vide. Démontrer que $\mathcal{H}_n$ contient une matrice M_0 dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Lorque $\mathcal{H}_n$ est non vide, que peut-on dire de la parité de n ?
8. On suppose $n > 2$ et $\mathcal{H}_n$ non vide. Soit M_0 une matrice dans $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\det(M_0)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1}.
   (b) Démontrer que n est un entier naturel multiple de 4.

Exercice 3 –

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a + b + c}{3}$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x; y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

2. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 4 – ✍

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.
Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\, ,\, \rangle$. Soit $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :
   (a) $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0$
   (b) $\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda \geqslant 0$
   (c) $\exists\, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

   On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha + 1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.
   (a) Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.
   (b) Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n - 1$.

3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

   On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.
   (b) Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$.
   Justifier que b est un endomorphisme autoadjoint.
   (c) Démontrer que : $\ker(a) = \ker(b)$.

4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} < 0)$.
   a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2**.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.
   On va montrer que la famille $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ est libre.

   Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

      i. Montrer que l'on a aussi : $\sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.
      ii. En utilisant le produit scalaire $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i\, ,\, z_n \right\rangle$, conclure.

   (b) Prouver que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n - 1$.
