Devoir maison n° 15 – entraînement personnel
MP
Vacances de février 2024

Ce sujet est divisé en trois parties.

— Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.

— Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

— Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

I. Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p, \qquad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et p appartenant à $]0, 1[$.
Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

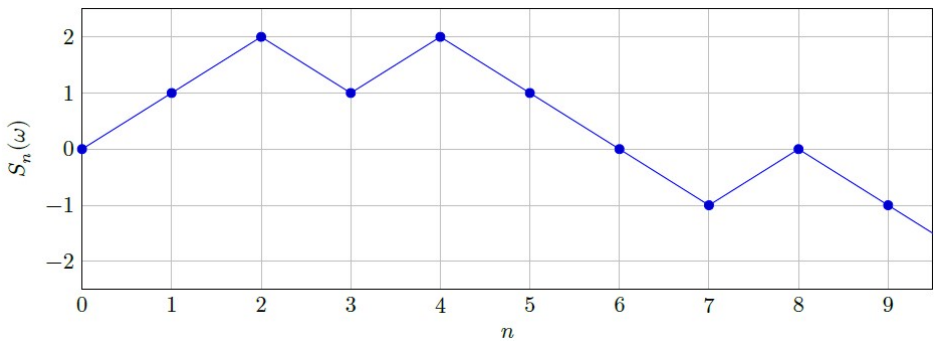

FIGURE 1 – Exemple de trajectoire possible

I.A - Espérance et variance de S_n

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul.
Soit Y_n la variable aléatoire sur Ω égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1, n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

1. Quelle est la loi de Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n. Justifier que S_n et n ont même parité.

I.B - Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m-uplet $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $s_\gamma(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))_{k \in [\![0,m]\!]}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

— on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geqslant 0$;

— on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

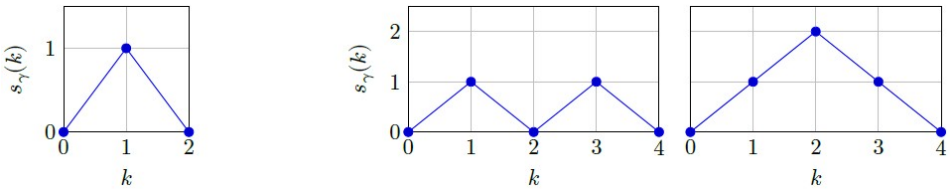

FIGURE 2 – Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

3. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] : s_\gamma(2i) = 0\}$.

On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \ldots, \gamma_{2n+1})$.

4. Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que α et β sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ un chemin de longueur m.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $P(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p.

Soit T la variable aléatoire, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall w \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T = 2n+2) = 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$.

I.C - Série génératrice des nombres de Catalan

7. En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}$$

8. A l'aide de la variable aléatoire T, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

9. En déduire que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \text{ et } g(t) = 2tf(t).$$

On rappelle que la série génératrice de T, donnée par $G_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

10. À l'aide des questions précédentes, exprimer G_T à l'aide de g et de $P(T = 0)$.
11. En déduire que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors T admet une espérance.
12. Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.
13. En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que
$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}.$$
14. Montrer que ε est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire
$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t}.$$
15. En déduire que $P(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.
16. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors T n'admet pas d'espérance.

I.D - Expression des nombres de Catalan et équivalent

17. Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1 + x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n à l'aide d'un coefficient binomial.
18. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
20. À partir de la question précédente, retrouver le résultat des question 11 et 16.

II. Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n + 1$ suivante :

$$G_n = \left((X^{i-1}|X^{j-1})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}.$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

II.A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.
23. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

II.B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big((V_{i-1}|V_{j-1})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

24. Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.
25. Montrer que $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n.
26. En déduire que $\det G_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

III. Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

III.A - Produit scalaire

27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

28. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.B - Système orthogonal

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.

29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est unitaire de degré n, et déterminer la valeur de $U_n(0)$.
30. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin(\theta) = \sin((2n+1)\theta)$.
31. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\int\limits_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)d\theta$.
32. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.
    Pour calculer la valeur de $(U_m|U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.

III.C - Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n|1)$.

33. À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2n-1}\mu_n.$$

34. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

35. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}.$$

III.D - Un autre déterminant de Hankel

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \text{ et } H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

36. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $(D_n | X^k) = 0$.
37. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant H'_n.