Devoir maison n° 14
MP
pour mardi 11 mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Au choix :

— Devoir type e3a : exercices 1 et 2.

— Devoir type CCINP : exercice 1 et partie 1 du problème 3.

— Devoir type Centrale - Mines : problème 3.

Exercice 1

1. **Question de cours**
   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$.

* * * * *

On se propose de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.
   (a) Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre a_{n-1} et a_{n+1}.
   (b) Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

3. **Quelques propriétés de la fonction F**
   (a) Étudier la parité de la fonction F.
   On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.
   (b) Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$.
      i. Justifier que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.
      ii. Prouver que pour tout entier naturel k non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

iii. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x,t) \in I \times [0, 2\pi], \quad 0 \leqslant \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant M_k$$

iv. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

v. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

(c) Montrer que F vérifie la relation $(**)$.

4. **Développement en série entière de F**

(a) Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

(b) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n \, \mathrm{d}t$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

(c) Calculer J_0 et J_1.

(d) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

(e) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

(f) Comparer alors les fonctions F et g.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$.

1. Réduction de A.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de A.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de A puis une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que P est orthogonale et $P^\top AP$ est diagonale.
Dans la suite, on pose $D = P^\top AP$.

2. Étude de $\mathcal{C}(A)$.

(a) Démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Démontrer que $F \subset \mathcal{C}(A)$.

(c) Pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, établir l'équivalence :

$$B \in \mathcal{C}(A) \iff P^\top BPD = DP^\top BP$$

(d) Démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

(e) Démontrer que $\mathcal{C}(A) = F$.

(f) La matrice A^3 appartient-elle à F (on justifiera la réponse) ?

3. On note p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\ker A$, et B la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $B \in \mathcal{C}(A)$.

Problème 3

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note u^* son adjoint, χ_u son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp} u$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note π_u le polynôme minimal de u.

L'endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque $u^* = -u$.

On note $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $\mathscr{L}(E)$ formés respectivement des endomorphismes autoadjoints, antisymétriques, orthogonaux (= isométries vectorielles).

Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que u^* soit un polynôme en u et $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u^* \in \mathbb{R}[u]\}$$

$$\mathcal{N}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u^* \circ u = u \circ u^*\}$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{N}(E)$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^\top$ peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$$\mathcal{P}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top \in \mathbb{R}[A]\} \text{ et } \mathcal{N}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = AA^\top\}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - Généralités $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_n$

1. (a) i. Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

   ii. Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathcal{B}$, une base orthonormale de E. Établir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{N}(E)$) et l'appartenance de A à $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{N}_n$).

   Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

   iii. Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

   (b) i. Vérifier que $S(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

   ii. Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathcal{P}_n$?

   En déduire que si $n \geqslant 2$, on a $\mathcal{P}(E) \neq \mathscr{L}(E)$.

   iii. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathcal{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soient triangulaires supérieures.

   Montrer que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.

   En déduire les éléments $u \in \mathcal{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

   iv. On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.

   En déduire que $O(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

   (c) i. Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A, tel que $\deg P_A < \deg \pi_A$ et $P_A(A) = A^\top$.

   Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.

   Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathcal{P}(E)$.

   ii. Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est un polynôme constant.

iii. Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

iv. Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.
Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ alors $B \in \mathcal{P}_n$ et $P_A = P_B$.

Partie II - Étude de $\mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{N}_n$

2. (a) Montrer que si $u \in \mathcal{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.

(b) Soient $u \in \mathcal{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que u et u^* ont le même noyau.

(c) Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

i. Comparer les déterminants de f et f^*. En déduire que m est pair.

ii. On considère les applications n et g définies sur $\mathbb{R}^m$ par $n(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|f(x)\|^2$ et l'application

$$q : U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ définie par } q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$$

Montrer que n et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m$ et que leurs différentielles en x fixé sont les formes linéaires

$$h \mapsto 2\langle x, h\rangle \text{ et } h \mapsto 2\langle f(x), f(h)\rangle$$

Montrer que l'application q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle en x, en calculant $\mathrm{d}q(x)(h)$ au moyen de produits scalaires et de normes.
On note $S = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}$.
Montrer que l'ensemble des valeurs prises par q sur S coïncide avec l'ensemble des valeurs prises par q sur U. Montrer que la fonction q admet un maximum sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in S$.
Montrer que, pour tout h, on a $\langle f(x_0), f(h)\rangle = \|f(x_0)\|^2 \langle x_0, h\rangle$.
En déduire que $\Pi = \mathrm{Vect}\,(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f.
Donner une base orthonormale de Π et exprimer la matrice de $f_{|\Pi}$ relative à cette base.

iii. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}$$

(d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et u^*. On note E_2 le supplémentaire orthogonal de E_1.

i. Montrer que E_2 est stable par u et u^*.

ii. Montrer que $\left(u_{|E_1}\right)^* = u^*_{|E_1}$.

iii. Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u_{|E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u_{|E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.

(e) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.
Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda), \text{ où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de } u.$$

Montrer que F est stable par u et u^*. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

(f) On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose $s = \dfrac{v+v^*}{2}$ et $a = \dfrac{v-v^*}{2}$.

i. Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé. On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}$$

ii. Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.
Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

iii. On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

(g) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

avec D matrice diagonale, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $b_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

(h) Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.
