Devoir maison n° 14
MP
pour mardi 6 février 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle , \rangle$ et de la norme associée. Soient p et r deux projecteurs orthogonaux distincts de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. *Dans cette question uniquement,* on suppose que p et r commutent.
   (a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.
   (b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer ses valeurs propres.
   (c) Montrer, en raisonnant par double inclusion, que $\ker(p \circ r) = \ker p + \ker r$ et $\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$.

2. *On ne suppose plus que p et r commutent.*
   Soit x un vecteur propre de $p \circ r$ associé à la valeur propre λ.
   (a) Dans le cas où $\lambda \neq 0$, montrer que $x \in \ker(p - \mathrm{id})$ et $(r(x) - \lambda x) \in \ker p$.
   (b) Calculer $\langle x, r(x) - \lambda x \rangle$. En déduire l'encadrement $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

Soit u l'application qui à $P \in E$ associe $u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.
2. (a) Prouver que pour tous p et q dans $[\![0, n]\!]$, on a : $\langle u(X^p)|X^q \rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$.
   (b) En déduire que u est un endomorphisme autoadjoint.
3. On sait qu'il existe alors une base orthonormale $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.
   Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(x) P_j(y)$.
   Pour y réel, on pourra décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base $(P_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.
4. Déterminer alors la trace de l'endomorphisme u, notée $\mathrm{Tr}(u)$.
5. (a) Pour tout y réel, montrer que l'on a : $u(Q_y)(y) = \frac{1}{2n+1}\left[(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right]$.

(b) Déterminer $\mathrm{Tr}(u^2)$. On pourra calculer $\int_0^1 u(Q_y)(y)\,\mathrm{d}y$.

Exercice 3

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
2. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
   Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).
   (d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
6. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.