**Devoir maison n° 13**
**MP**
*pour mardi 11 février 2025*

Lycée Camille PISSARRO

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.*
*Bon travail !*

---

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
$\not{\ell}$ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices $\not{\ell}$ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

---

## Exercice 1 – ✍

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_1$ la fonction qui à tout $x$ de $\mathbb{R}$ associe $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
   Justifier que $F_1$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la fonction $F$ qui à tout $x$ de $\mathbb{R}$ associe $\int\limits_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 , on note $E_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $e_k$ la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de $E_n$.
On note $D$ l'endomorphisme dérivation de $E_n$ et Id l'endomorphisme identité de $E_n$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.
4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur $E_n$ une application linéaire $L$ en posant $g = L(f)$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int\limits_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$$
5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
   Montrer que $g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.
6. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.
7. (a) Calculer $L(e_0)$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0,n-1]\!], L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.
   (c) En déduire que $L$ est un endomorphisme de $E_n$.
8. Prouver que $L$ est un automorphisme de $E_n$.
9. Recherche des sous-espaces propres de $L$.
   Soient $\lambda$ une valeur propre de $L$ et $f$ un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que $\lambda \neq 0$.
   (b) Montrer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0 \quad (*)$.

(c) On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

(d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

(e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $L$ et déterminer les vecteurs propres associés. L'endomorphisme $L$ est-il diagonalisable ?

10. Comparer $L^{-1}$ et $D + \mathrm{Id}$.
11. Déterminer la matrice $M$ de $L^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$.
12. Déterminer les valeurs propres de $L^{-1}$. Retrouver alors les valeurs propres de $L$.

---

## Exercice 2 – ↯

On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle linéaire suivante sur $]0, +\infty[$ :

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 + x^2)^2 \ln x \tag{1}$$

### I - Résultats préliminaires

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X^2+1)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$.
2. En déduire les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$.
3. Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x \ln x$.
4. Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto (1 - x^2) \ln x$.

### II - Résolution de l'équation sans second membre

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire sur $]0, +\infty[$ :

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2}$$

5. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (2).
6. Soit $\varphi : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$.
Montrer que la fonction $\varphi$ est solution de (2) si, et seulement si, la fonction $\psi'$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :
$$z' + \frac{2}{x(x^2 + 1)} z = 0 \tag{3}$$
7. Résoudre (3) et en déduire l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (2).

### III - Résolution de l'équation complète

On note $\Sigma$ l'ensemble des solutions, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (1).

8. On suppose que l'on connaît une solution $\varphi_0$ de l'équation différentielle (1). Quel est alors l'ensemble $\Sigma$ ?

*La suite ne peut être faite que si la section « Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et wronskien » a été vue en cours.*

9. Mettre l'équation (1) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1.
10. À l'aide de la partie II, donner une base du système différentiel homogène associé.
11. Mettre alors en œuvre la méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière $\varphi_0$ de l'équation différentielle (1).
12. Conclure.

---