Devoir maison n° 13
MP
pour mardi 30 janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !

Exercice 1

Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace euclidien. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur E.
Soit (a, b) une famille libre de vecteurs de E et f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : t \mapsto \|a - tb\|$$

Étudier les variations de f et interpréter le minimum de f. On retrouvera la valeur minimale par une méthode algébrique.

Exercice 2

On considère un espace vectoriel euclidien E non réduit à $\{0_E\}$.

1. Soit h un endomorphisme autoadjoint de E, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle h(x) | y \rangle = \langle x | h(y) \rangle$$

   (a) Montrer que $\ker h$ et $\operatorname{Im} h$ sont supplémentaires orthogonaux.
   (b) Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est autoadjoint.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Établir l'égalité : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. On considère deux projecteurs orthogonaux p et q de E. On pose : $f = p \circ q$.
   (a) On pose $F = \operatorname{Im} p + \ker q$ et $G = \ker p \cap \operatorname{Im} q$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux.
   (b) Montrer que la restriction de f à $\ker q + (\ker p \cap \operatorname{Im} q)$ est identiquement nulle.
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} p$ est stable par f.
   (d) On note $\overline{f}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} p$ induit par f. Montrer que $\overline{f}$ est un endomorphisme autoadjoint de $\operatorname{Im} p$.
4. Déduire de l'étude précédente que f est diagonalisable.

Exercice 3

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.