

Devoir maison n° 12

MP

pour mardi 28 janvier 2025



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✚ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✚ sont OBLIGATOIRES.

✚ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ✚ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✚

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

- (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ est d'espérance finie et calculer son espérance.
(b) En déduire la valeur de $E(X^2)$.
- Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, P(X \geq i) \leq \frac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.
Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2) \dots (k+i)}$$

- (a) Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

- (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.

- (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P(X \geq k) \leq \frac{k}{k-\lambda} P(X = k)$.
Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $P(X > k) \leq P(X = k)$.

- (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum_{i=2}^{+\infty} P(X \geq i) \leq 1$.

- (c) Dans le cas général, que vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geq i)$?

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right)$.
- Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t \leq e^{-t}$.
 - Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n, k) = \frac{(k-1)k}{2n}$.
 - Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(Y = k) \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n, k, \lambda) = \frac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.
 - Quelle majoration de $P(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?
 - En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\sum_{j=k+1}^n P(Y = j) \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.
-

Exercice 2 –

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

- Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
- Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
- Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. Calcul de la somme de cette série

- Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

- En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} \, dt$.

(c) Intégration terme à terme ?

- Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
- Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.
- Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

- On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3 –

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le k -ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le k -ième lancer de la pièce donne face ».

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se

termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes. Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\textbf{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

$$\textbf{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on n'obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

1. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière : $\sum_{k \geq 0} x^k$.
2. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'événement $(L_1 = k)$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.
4. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
5. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 est d'espérance finie, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .
8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

9. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n).$$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m P(N_m = k)x^k$.

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

11. Déduire de 10. que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x).$$

12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

13. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .