Devoir maison n° 12
MP
pour mardi 23 janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !
Pour ce devoir, il est demandé de rendre deux exercices.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   On note $\|.\|$ la norme associée.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ orthonormée de E, pour ce produit scalaire, telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg Q_k = k$.
3. (a) Que dire de l'ensemble $F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$?
   (b) Vérifier que $(Q_1 - Q_1(0), \ldots, Q_n - Q_n(0))$ est une base de F.
4. Justifier que : $U = Q_0 + \sum_{j=1}^{n} Q_j(0)Q_j$ appartient à $F^\perp$.
5. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\langle Q_k, Q_k'\rangle = 0$.
6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En calculant de deux façons :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}[-(Q_k(t))^2 e^{-t}]\,\mathrm{d}t$$

   déterminer la valeur de $[Q_k(0)]^2$.
7. Calculer $\delta = \min\{\|Q_0 - P\|,\ P \in F^\perp\}$ et $d = \min\{\|Q_0 - P\|,\ P \in F\}$.

Exercice 2

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{Tr}(A^\top A')$, où $\mathrm{Tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 3

On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $\langle .|. \rangle$ et $\|.\|$, donc si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\| = \langle x|x \rangle^{1/2}$$

1. (a) Démontrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a : $\langle x|y \rangle \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (inégalité de Schwarz).
   (b) Montrer que $\langle x|y \rangle = \|x\| \, \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.
   (c) Montrer que si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$ vérifie : $b \neq c$ et $\|a - b\| = \|a - c\|$, on a alors :
   $$\left\| a - \frac{b+c}{2} \right\| < \|a - b\|$$
2. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u \in F$ tel que :
   $$\|x - u\| \leqslant \|x - y\| \quad \text{pour tout } y \in F$$
   On supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général.
3. Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $u \in A$ tel que $\|x - u\| \leqslant \|x - y\|$ pour tout $y \in A$.

Ceci établit le théorème de la projection sur les convexes de $\mathbb{R}^n$: « soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique application, notée P, de $\mathbb{R}^n$ dans A qui vérifie :

$$\|x - P(x)\| = \min \{\|x - y\|, y \in A\}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

$P(x)$ s'appelle la projection de x sur A. »

4. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que : $\langle x - \alpha | y - \alpha \rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in A$, on a : $\alpha = P(x)$.
5. Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que : $\langle x - P(x) | y - P(x) \rangle > 0$.

   Soit alors $\mathcal{S} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{S}(t) = \|(x - P(x)) - t(y - P(x))\|^2$.

   Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que : $\mathcal{S}(t) < \|x - P(x)\|^2$.
6. Déduire de 4. et 5. que $u = P(x)$ si et seulement si : $u \in A$ et $\langle x - u | y - u \rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in A$.