Devoir maison n° 11
MP
pour mardi 21 janvier 2025

Lycée Camille PISSARRO

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
↯ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ↯ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum (-\ln n)^n z^n \qquad \sum \cos(n^2) z^n$$

Exercice 2 – ✍

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1$. Montrer que la suite (a_n) est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Déterminer la somme $S(x)$ de la série entière $\sum a_n x^n$ à l'aide d'une équation différentielle. On montrera que pour $x \in]-1, 1[$, $S'(x) = \frac{1+x}{1-x} S(x)$.
4. À l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$.
5. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

Exercice 3 – ↯

Introduction

Dans cet exercice, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

1. Soit $x \in]-1,1[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.
   La série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1,1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1,1[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $]-1,1[$.
3. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.
   Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Expression sous forme de série entière.
   On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right) \text{ où } I_n = \{(k,p)\in A, kp=n\}.$$
   Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.
   En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } b_n = \sum_{d|n} a_d$$

Partie II - Exemples

5. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.
6. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.
   Justifier que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1.
   On admet que pour $n \geqslant 1$, $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.
   Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \dfrac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.
7. Établir, à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.
8. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.
   En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question 3.
9. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$. On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$,
   $$\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$
   et utiliser là encore le théorème de double limite.
