Devoir maison n° 11 – facultatif
MP
pour mardi 9 janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !
Pour ce devoir facultatif, il est demandé de rendre les deux premiers exercices, puis le troisième, au choix entre A et B.

Exercice 1

Des bits d'information, c'est-à-dire des 1 ou 0, sont transmis par l'intermédiaire d'un canal. Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé peut être altéré en sortie : un 1 (respectivement un 0) en entrée peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.
On note b le bit envoyé et b' le bit en sortie.

$$b \longrightarrow \boxed{\text{canal bruité}} \longrightarrow b'$$

Après observation, on modélise la transmission d'un bit comme suit :

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b. On note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé ($\alpha = P(b = 1)$). Et donc $1 - \alpha$ est la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- On note p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission. Et donc $1 - p$ est la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
- On note q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré pendant la transmission. Et donc $1 - q$ est la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

On suppose que $0 < \alpha < 1$, $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

1. Écrire p, q, $1 - p$ et $1 - q$ en termes de probabilités conditionnelles.
2. Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?
3. On reçoit le bit 1. Quelle est la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le **même** bit b. On note $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ les n bits obtenus en sortie et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus en sortie. Les valeurs possibles de X sont donc $0, 1, \ldots, n$.

4. Soit k un entier compris entre 0 et n. Exprimer $P(X = k)$ en fonction des paramètres p, q et α.
5. En déduire l'espérance de X en fonction des paramètres p, q et α.
6. Donner la probabilité que le bit 1 ait été envoyé sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k, où k est un entier compris entre 0 et n.

Désormais, le canal est supposé symétrique, c'est-à-dire que chaque bit, que ce soit un 0 ou un 1, peut être altéré avec la même probabilité $(1 - p)$. On suppose que $\frac{1}{2} < p < 1$.

7. (a) Déterminer, en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0.
   (b) Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?
8. Jusqu'à la fin de l'exercice, $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probablité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à-dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable en sortie.
   (a) Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

(b) Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

(c) Écrire une fonction `coeff_binomial(N,k)` qui prend k et N en entrée, avec $0 \leqslant k \leqslant N$, et renvoie $\binom{N}{k}$.

(d) On suppose que $p = 0,95$. Écrire un programme en langage Python qui prend en entrée l'entier naturel n et donne une estimation de $f(n)$.

(e) *Facultatif et pour ceux qui connaissent (chapitre pas encore abordé) :* Reprendre la question précédente en mettant en œuvre un procédé de mémoïsation pour éviter les calculs redondants.

Exercice 2

Dans une classe de 30 élèves, on considère une expérience consistant d'abord à demander à chaque élève sa date d'anniversaire. La suite de l'expérience (simulée 1000 fois sur ordinateur) est décrite par le programme `Python` ci-dessous :

```python
import numpy.random as rd
Nexp, Neleve, test = 1000, 30, 0

for n in range(Nexp):
    anniv = [0]*Neleve
    for i in range(Neleve):
        anniv[i] = rd.randint(1,366) # choix d'un jour (équiprobable)
    anniv.sort() #tri par ordre croissant
    ok = 0
    for j in range(Neleve-1):
        if anniv[j] == anniv[j+1]:
            ok = 1
    test = test + ok

print(test/Nexp)
```

1. Le code retourne une valeur (à chaque fois différente) autour de 0,71. Que représente cette valeur ?
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité simulée par ce programme.
3. Écrire un programme permettant de déterminer le nombre d'élèves à partir duquel cette valeur dépasse 0,5.

Exercice 3 – au choix

Exercice 3 – A

Un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pour la première fois deux résultats « pile » consécutifs et arrête alors la succession des lancers.
On fait les hypothèses suivantes :

— les résultats des différents lancers effectués sont indépendants les uns des autres ;

— à chaque lancer, la probabilité d'obtenir « pile » vaut p, où p est un réel fixé tel que $0 < p < 1$; à chaque lancer, la probabilité d'obtenir « face » vaut $q = 1 - p$.

On note X le nombre aléatoire de lancers de la pièce ainsi effectués.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
2. Calculer la probabilité des événements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$.
3. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note u_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.
   Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a :
$$u_{n+2} = qu_{n+1} + pqu_n$$

4. Montrer qu'il existe deux réels r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, tels que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on ait :
$$u_n = \frac{p^2}{r_1 - r_2}\left((q - r_2)r_1^{n-2} - (q - r_1)r_2^{n-2}\right)$$
Il est inutile d'expliciter u_n selon les valeurs précises de r_1 et r_2.

5. Déterminer l'ensemble, noté I, des nombres réels x pour lesquels la série de terme général $u_n x^n$ est absolument convergente. On pose alors :
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n$$
Montrer que, pour tout x de I, on a : $\quad S(x) = \dfrac{x^2 p^2}{1 - qx - pqx^2}$.
Que vaut en particulier $S(1)$? Quelle est la signification du résultat obtenu ?

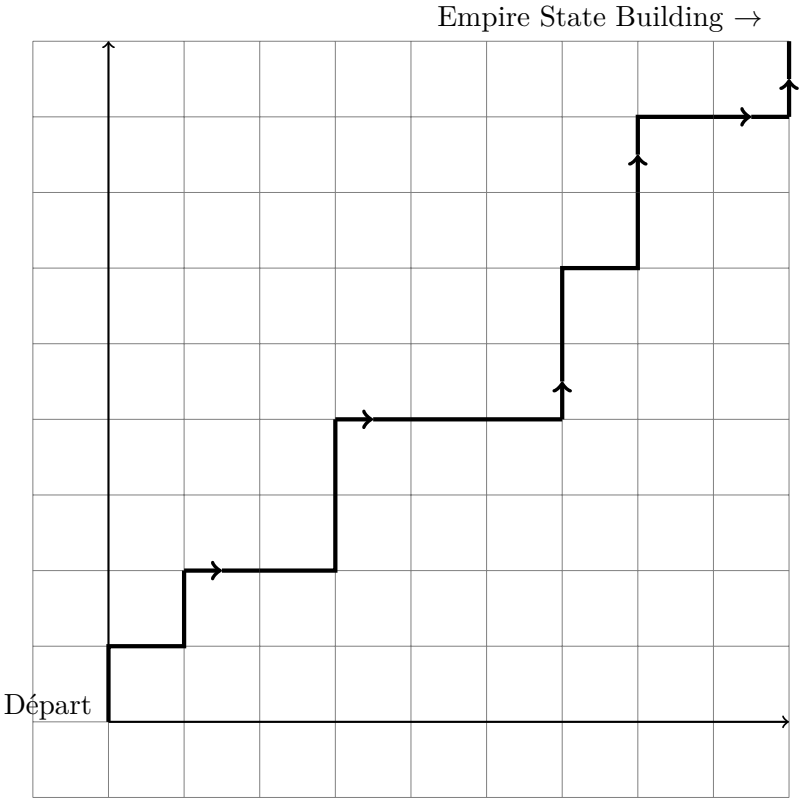
6. On note A l'événement « le jeu s'arrête au bout d'un nombre pair de lancers ».
   (a) Montrer que $P(A) = \dfrac{1 - pq}{1 + q^2}$.
   (b) Montrer que lorsque p décrit l'intervalle $]0, 1[$, la probabilité $P(A)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 3 – B

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :
$$x_0 = y_0 = 0$$
$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant \ell, \qquad (x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$
La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.

1. (a) Écrire en langage Python une fonction `deplacement(L,a,b)` dont la valeur est $(a, b + 1)$ si $L =$ "N" et $(a + 1, b)$ si $L =$ "E".
   (b) Écrire une fonction `chemin(m)` où m est une chaîne constituée des caractères "N" et "E" et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.
2. (a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E. En déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.



Le trajet est (N,E,N,E,E,N,N,E,E,E,N,N,E,N,N,E,E,N)

(c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement « Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$ ». On pourra noter N_k l'événement « à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord » et E_k l'événement « à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est ».

   (a) Calculer la probabilité de l'événement U_1.

   (b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

   (c) Soit $n \geqslant 2$. On admet, pour des raisons de symétrie, que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

   Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

   (d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

   (e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

   (f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$

   puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

   (a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

   (c) Montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$. Que peut-on en déduire ?