Devoir maison n° 10
MP
pour mardi 14 janvier 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✍ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✍ sont OBLIGATOIRES.
🗲 : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices 🗲 sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✍

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires. L'urne U_1 contient 12 boules blanches et 5 boules noires, l'urne U_2 contient 10 boules blanches et 10 boules noires.
Après chaque tirage, on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard.
Si l'on obtient une boule blanche (respectivement noire), le deuxième tirage se fait dans U_1 (respectivement U_2).
Au i-ième tirage, si la boule obtenue est blanche (respectivement noire), le $(i+1)$-ième tirage se fait dans U_1 (respectivement U_2).
Soit B_i l'événement : « on obtient une boule blanche au i-ième tirage ».

1. Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
2. Exprimer $P(B_n)$ en fonction de $P(B_{n-1})$.
3. Montrer que la suite $P(B_n)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 – 🗲

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. $\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\mathrm{L}^1(I) = \{f \in \mathcal{C}^0(I) \ ; \ \int_I |f| \text{ existe}\} \text{ et } \forall f \in \mathrm{L}^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f|$$

$$\mathrm{L}^2(I) = \{f \in \mathcal{C}^0(I) \ ; \ \int_I |f|^2 \text{ existe}\} \text{ et } \forall f \in \mathrm{L}^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$$

Partie I

1. Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation différentielle : $y' + cy = f$ admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, et qui vérifie $\varphi(f)(0) = 0$. Démontrer :
$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Prouver que l'application φ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose, dans cette partie, que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant 0 < b$.

3. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leqslant M_1\|f\|_2 \leqslant M_2\|f\|_\infty$$

4. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant M_0\|f\|_\infty$$

5. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leqslant A\|f\|_1$$
En déduire :
$$\exists C \in \mathbb{R}^+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_1 \leqslant C\|f\|_1$$

6. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leqslant B\|f\|_2$$
En déduire :
$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leqslant K\|f\|_2$$

7. L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue :
   (a) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$?
   (b) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_1$?
   (c) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :
$$\forall x \in I,\ f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

8. Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.
9. Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.
10. Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.
11. Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^1(I)$ muni de la norme $\|.\|_1$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|.\|_1$.

12. Soit $f \in \mathrm{L}^2(I)$. On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$. Démontrer :

$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^2(I)$ muni de la norme $\|.\|_2$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|.\|_2$.

Partie IV

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \{f \in \mathcal{C}^1(I),\ \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent}\}$$

13. (a) Démontrer que, si f et g sont dans $H(I)$, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

    (b) Démontrer que l'application :

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} H(I)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t + \int_I f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right)$$

    définit un produit scalaire sur $H(I)$.

    (c) En déduire que l'application $\|.\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I),\ \|f\|_H = \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t + \int_I f'(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

    est une norme sur $H(I)$.

14. On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $\mathrm{L}^2(I)$ muni de la norme $\|.\|_2$. On pose :

$$K = \{f \in H(I),\ f(0) = 0\}$$

    (a) Démontrer que, pour tout f dans $\mathrm{L}^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $\mathrm{L}^2(I)$ et $\varphi(f)$ est dans K. Démontrer que :

$$\exists A > 0,\ \forall f \in \mathrm{L}^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leqslant A\|f\|_2$$

    (b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $\mathrm{L}^2(I)$ dans K.

    (c) Démontrer que φ est continue de $(\mathrm{L}^2(I), \|.\|_2)$ dans $(K, \|.\|_H)$.

    (d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|.\|_H)$ dans $(\mathrm{L}^2(I), \|.\|_2)$.

Exercice 3 – ϟ

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $(K_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de parties compactes de E, non vides, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que $K \neq \emptyset$.
2. Soit U un ouvert contenant K. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $K_n \subset U$ (on pourra raisonner par l'absurde).