Devoir maison n° 10
MP
pour mardi 19 décembre 2023

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats. Bon travail !
Pour ce devoir, il est demandé de rendre un exercice, au choix.

Exercice plus facile

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le i-ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
   (b) Reconnaître la loi de X et donner son espérance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :
   $$P\Big((X = k) \cap (Y = 0)\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$
   (b) Donner la loi du couple (X, Y).
   (c) En déduire la loi de Y et donner son espérance.

Exercice plus difficile

Partie I : Étude d'une variable discrète d'univers image fini.

Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules ($n \geqslant 1,\ m \geqslant 1$). On s'intéresse au protocole suivant :
• On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
• On met une boule dans l'urne choisie.
• On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

A. Préliminaires.

On définit la suite de terme général a_n par : $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geqslant 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

3. Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On admet que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

B. Étude de cas particuliers.

Dans cette partie, $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de R_1, R_2 et R_3. Justifier vos calculs.
2. Calculer l'espérance de R_1, R_2 et R_3.

   Dans toute la suite du problème $n \geqslant 2$.

3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
4. Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.
   (a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$-ième placement l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.
   (b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$. *On obtiendra* $P(R_n = k) = \binom{k+n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}$.

5. Vérifier que

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-2\},\ 2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)$$

6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que

$$E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$$

7. Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.

8. De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$$