Concours blanc sujet B– maths
MP
vendredi 8 novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

Partie I - Préambule

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ et en déduire que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{C}{n^2}$$

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\ln(\frac{n+1}{n}) - \frac{1}{n}\right)$ converge, puis qu'il existe une constante γ telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to +\infty$$

   Cette constante γ s'appelle la constante d'Euler.

Partie II - Une expression intégrale de la constante d'Euler

L'objet de cette partie est d'établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = -\gamma \tag{1}$$

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(t)\, e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$ puis que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0, n]$, on a

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant e.e^{-t}$$

5. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t)\, \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

6. Montrer successivement les égalités

$$\int_0^n \ln(t)\, \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\, \mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\, \mathrm{d}u$$

7. En effectuant le changement de variables $t = 1 - u$ dans la dernière intégrale de la question précédente, en déduire la formule (1).

Problème (épreuve de 3 heures)

Dans tout le sujet on considère des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$.
Alors, $\dim(\mathcal{V}) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim(\mathcal{V}) = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (**lemme A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (**lemme B**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents .

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_B\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!]$$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geqslant q \geqslant 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$.
Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.
5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$ alors $\mathrm{Im}\, u^{p-1} = \mathrm{Im}\, u \cap \ker u$ et $\mathrm{Im}\, u^{p-1}$ est de dimension 1.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (.|.))$.
Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui même définie par :
$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

III. Deux lemmes.

On considère ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet indice est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geqslant 2$. On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\mathrm{Im}\, u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \,|\, v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\mathrm{Tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i \ f_i^{(k)}$$

   Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.
   Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\mathrm{Tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire le validité du lemme A.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. *On pourra remarquer :*

$$f_1^{(p-1)}(y) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left((u + \frac{1}{n}v)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y)\right)}{\frac{1}{n}}$$

   À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV. Démonstration du théorème de Gerstenhaber.

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$ on a $\dim \mathcal{V}' \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$.

On munit E d'un produit scalaire $(.|.)$, ce qui en fait un espace euclidien.
On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \mathrm{Vect}\,(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x)\,|\,v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} \mid v(x) = 0\}$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\, \overline{u}(z) = \pi(u(z))$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u}\,|\,u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} \mid \overline{u} = 0\}$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$. *On pourra introduire des applications linéaires bien choisies.*
14. Montrer que
$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim \overline{\mathcal{V}}$$
On pourra utiliser les applications linéaires de la question précédente.
15. Montrer en utilisant la question 6. qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x\,|\,a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z}.$$
et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.
16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme A que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
17. Justifier que $\lambda.x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n - 1$$
18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.
19. Démontrer que
$$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$
20. Démontrer que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(L) = n$$
et
$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$$
En déduire que $\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
21. En appliquant, l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.
Compte-tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.
On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geqslant n-1$ d'après la question 21.
22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.*
23. On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$.
24. Conclure.