Concours blanc – maths
MP
vendredi 8 novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1. Calculer le polynôme caractéristique (sous forme factorisée) de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{Id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira $\alpha < \beta$.
4. Que dit le lemme de décomposition des noyaux dans cette situation ?
5. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?
6. Application. Dans cette question, E est de dimension 3. On munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme u de E de représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$ donnée par M introduite en début d'exercice.
   (a) Vérifier que u satisfait la relation $(\star)$. *On fera apparaître les calculs sur la copie.*
   (b) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose, pour $f \in E$,

$$N_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que N_1 définit une norme sur E. De même, on n'en demande pas la démonstration, N_2 est une norme sur E.

(b) Donner la définition de deux normes équivalentes. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes sur E.

2. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme N_1 ?

Exercice 3

Partie I - Préambule

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ et en déduire que la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left| \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \right| \leqslant \frac{C}{n^2}$$

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\ln(\frac{n+1}{n}) - \frac{1}{n} \right)$ converge, puis qu'il existe une constante γ telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to +\infty$$

Cette constante γ s'appelle la constante d'Euler, et nous allons étudier certaines de ses propriétés dans les parties suivantes.

Partie II - Une expression intégrale de la constante d'Euler

L'objet de cette partie est d'établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = -\gamma \tag{1}$$

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(t)\, e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$ puis que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0, n]$, on a

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant e.e^{-t}$$

5. Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

6. Montrer successivement les égalités

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1}\, \mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\, \mathrm{d}u$$

7. En effectuant le changement de variables $t = 1 - u$ dans la dernière intégrale de la question précédente, en déduire la formule (1).

Partie III - Lien avec la fonction ζ

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (qui se prononce « dzêta »).

8. Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien défini et vérifie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

   En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

9. (a) Montrer que pour $s > 1$, la série

$$\sum_{n\geqslant 1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right)$$

   converge.

   (b) Montrer que sa somme vaut $\zeta(s)$.

   (c) En déduire la formule

$$\zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{E(t)}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t$$

   où $E(.)$ désigne la fonction partie entière.

10. Démontrer que pour tout entier $N \geqslant 2$, on a

$$\int_1^{N} \frac{E(t) - t}{t^2} \,\mathrm{d}t = H_N - \ln(N) - 1$$

   et en déduire la formule

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^2} \,\mathrm{d}t = \gamma - 1 \tag{2}$$

11. *(5/2 uniquement)* En justifiant l'égalité $\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = s \int_1^{+\infty} \frac{E(t) - t}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t$, conclure que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1) \text{ lorsque } s \to 1^+$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \geqslant 1$ tel que $N^k = 0$. On note $N_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes. On identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes de taille n, et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé. On note $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

L'objet de ce problème est de démontrer le théorème suivant, dû à Gerstenhaber.

Théorème. *Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes, alors*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

On note T_n^+ (resp. T_n^-) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) et T_n^{++} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire n'ayant que des 0 sur la diagonale.

1. Montrer que T_n^+ est un espace vectoriel. On admet que T_n^- et T_n^{++} sont aussi des espaces vectoriels. Donner la dimension de T_n^+, T_n^- et T_n^{++}.
2. Montrer que $T_n^- \oplus T_n^{++} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \geqslant k,\ x_i = 0\}$. On note également $E_0 = \{0\}$ et $E_{n+1} = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in T_n^{++}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $u(E_k) \subset E_{k-1}$.
   (b) En déduire que A est nilpotente. On a ainsi montré que $T_n^{++} \subset N_n$.
   (c) Montrer que $T_n^+ \cap N_n = T_n^{++}$.
4. N_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Montrer que si $A \in N_n$, alors $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
6. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A, B et $A+B$ sont nilpotentes, alors $\mathrm{Tr}(AB) = 0$.

Dans la suite du problème, on fixe un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans N_n. On note π la projection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur T_n^{++} parallèlement à T_n^- (qui est bien définie grâce à la question 2.). On note également τ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par la transposition : $\tau(M) = M^\top$.

7. (a) Montrer que $\dim(V) = \dim(V \cap T_n^-) + \dim(\pi(V))$.
   (b) En déduire que $\dim(V) = \dim(\tau(V \cap T_n^-)) + \dim(\pi(V))$.
8. Montrer que $\tau(V \cap T_n^-)$ est inclus dans T_n^{++}.
9. Soit $A \in \tau(V \cap T_n^-) \cap \pi(V)$ et $N \in V$ telle que $A = \pi(N)$.
   (a) Montrer que $A^\top + N$ appartient à V. En déduire que $\mathrm{Tr}(A^\top N) = 0$.
   (b) Montrer que $N - A$ appartient à T_n^- et en déduire que $A(N^\top - A^\top) \in T_n^{++}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0$.
   (d) Conclure que $A = 0$.
10. En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer le théorème de Gerstenhaber.
