Quelques révisions de MPSI

1 Décomposition en éléments simples

Exemple On considère $F(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)^3(x^2+x+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$. Il existe a, b, c, d, e, f, g, h réels et Q polynôme tels que :

$$F(x) = Q(x) + \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \frac{c}{(x-\beta)^2} + \frac{d}{(x-\beta)^3} + \frac{ex+f}{x^2+x+1} + \frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$$

1. Q : quotient de la division euclidienne du numérateur de F par son dénominateur. C'est la partie entière de F.
2. a : on multiplie F par $x-\alpha$ puis on évalue en $x=\alpha$.
3. d : on multiplie F par $(x-\beta)^3$ puis on évalue en $x=\beta$.
4. c : on retranche $\dfrac{d}{(x-\beta)^3}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $(x-\beta)^2$ puis on évalue en $x=\beta$.
5. b : on retranche $\dfrac{c}{(x-\beta)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par $x-\beta$, on multiplie par $x-\beta$ puis on évalue en $x=\beta$.
6. g, h : on multiplie F par $(x^2+x+1)^2$ puis on évalue en $x=j$ (racine de x^2+x+1). On trouve $gj+h$, d'où g et h.
7. e, f : on retranche $\dfrac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$ de F, on simplifie la fraction obtenue par x^2+x+1, on multiplie par x^2+x+1 puis on pose $x=j$. On trouve $ej+f$, d'où e et f.

D'autres relations peuvent aussi être utilisées, par exemple :

— On multiplie par x^k puis on fait tendre x vers $+\infty$.

— On prend des valeurs particulières de x.

— Utiliser des arguments de parité.

Entraînement : cahier de calcul.

2 Quelques théorèmes d'analyse réelle

Théorème 1 – théorème de Rolle

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Ce théorème se généralise en l'égalité des accroissements finis : si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème 2 – théorème de la bijection

Toute fonction réelle strictement monotone et continue sur l'intervalle I, admet une fonction réciproque *de même monotonie*, définie et *continue* sur l'*intervalle* $f(I)$.

- Par exemple, si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, alors :
  — f est bijective de $I = [0,+\infty[$ dans $f(I) =$.
  — f^{-1} est
  — f^{-1} est

- Au programme, figure aussi la propriété : si g est une fonction continue sur un intervalle et injective, alors g est strictement monotone.

Théorème 3 – Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, bijective de I dans J. Soit $y \in J$. On suppose que f est dérivable en $a = f^{-1}(y)$.

f^{-1} est dérivable en y si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$.

Lorsque $f'(a) \neq 0$, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))})$$

Je vous laisse réviser les fonctions circulaires réciproques au programme : arcsin, arccos, arctan.

Théorème 4 – Théorème de la limite de la dérivée

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que
$$\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$
Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
On remarque que f' est continue en a.
- On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$. Alors
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$
Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en a, et la fonction f n'est pas dérivable en a.

Variante utile

> Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
> On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a.
> Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I entier et $f'(a) = \ell$.

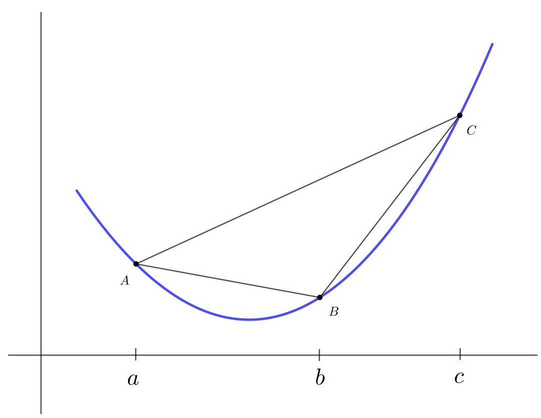
3 Convexité

- f est *convexe* sur I si $\forall (a,b) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$,
$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$
f est *concave* sur I si $-f$ est convexe sur I.
Un *point d'inflexion* de f est un point en lequel f change de convexité.

- f est convexe si, et seulement si, la courbe représentative de f est en-dessous de ses cordes.

- Inégalité de Jensen
Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$
soit encore $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$

- Inégalité des pentes
f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $\mathcal{T}_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ (« les pentes vont croissant »).
Si f est convexe sur I, on a *l'inégalité des pentes*. Pour a, b, c dans I tels que $a < b < c$, on a
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$



Pente de $[AB]$ $\leqslant$ Pente de $[AC]$ $\leqslant$ Pente de $[BC]$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad f' \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \quad C_f \text{ est au-dessus de ses tangentes sur } I \end{aligned}$$

- Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$ sur I.

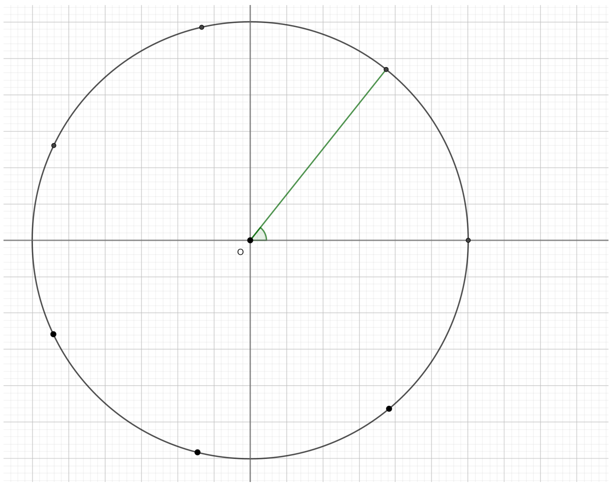
4 Groupe des racines n-ième de l'unité

Il y a exactement n nombres complexes z solutions de l'équation $z^n = 1$. Dit autrement, le polynôme $X^n - 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$. Ces n nombres constituent l'ensemble $\mathbb{U}_n$. On a

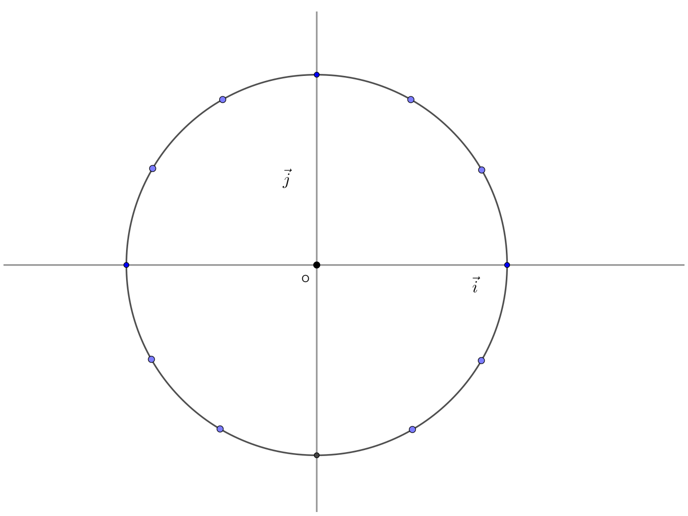
$$\mathbb{U}_n = \{\omega^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\} \text{ où } \omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$$

Il faut savoir placer ces n nombres sur le cercle trigonométrique et avoir compris qui est le conjugué de chacun.

Factoriser $X^7 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.



Factoriser $X^8 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.



5 Morphismes

morphisme de groupe	$\varphi(x * y) = \varphi(x) \perp \varphi(y)$
morphisme d'anneau	$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ $\quad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$ $\quad \varphi(1) = 1$
morphisme d'espace vectoriel = application linéaire	$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$
morphisme d'algèbre	$\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$ $\quad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$ $\quad \varphi(1) = 1$

6 Rang

- On appelle matrice extraite de A une matrice B obtenue en supprimant certaines lignes et/ou colonnes de A. On a alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
  $\mathrm{rg}(A)$ est la taille maximale des matrices inversibles qu'on peut extraire de A. C'est donc la taille maximale des déterminants extraits non nuls.

- Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes :
  $\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_p)$.
  Le rang de A est aussi le rang de ses vecteurs lignes (une matrice et sa transposée ont même rang).
  Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de A (méthode du pivot de Gauss) transforment A en des matrices de même rang que A.

- Matrices équivalentes
  Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  A et B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.
  Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes.

  Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang. En notant r leur rang commun, elles sont équivalentes à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Matrices semblables
  Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.
  Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Elles ont donc même rang, même trace, même déterminant.