1

Démonstration de $E_{ab} E_{cd} = \delta_{b,c} E_{a,d}$

$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. Pour simplifier, je prends des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

- $\left[E_{a,b} E_{c,d}\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left[E_{a,b}\right]_{i,k} \left[E_{c,d}\right]_{k,j}$

$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{a,i} \delta_{b,k} \delta_{c,k} \delta_{d,j}$ (on pense bien aux lignes et aux colonnes : $E_{a,b}$ a tous ses coefficients nuls sauf en ligne a et colonne b)

$= \delta_{a,i} \delta_{d,j} \sum_{k=1}^{n} \delta_{b,k} \delta_{c,k} \underset{(*)}{=} \delta_{a,i} \delta_{d,j} \; \delta_{b,c}$

- D'autre part,

$\left[\delta_{b,c} E_{a,d}\right]_{i,j} = \delta_{b,c} \left[E_{a,d}\right]_{i,j} = \delta_{b,c} \, \delta_{a,i} \, \delta_{d,j}$

On a bien $\left[E_{a,b} E_{c,d}\right]_{i,j} = \left[\delta_{b,c} E_{a,d}\right]_{i,j}$

$(*)$

<u>1er cas</u> : $b \neq c$.
$$\sum_{k \in [\![1,n]\!]} \delta_{b,k} \delta_{c,k} = \delta_{b,b} \delta_{c,b} + \delta_{b,c} \delta_{c,c} + \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq b \\ k \neq c}} \delta_{b,k} \delta_{c,k}$$
$$= 1 \times 0 + 0 \times 1 + (0 + \dots + 0) = 0$$

<u>2ème cas</u> : $b = c$
$$\sum_{k \in [\![1,n]\!]} \delta_{b,k} \delta_{c,k} = \delta_{b,b} \delta_{b,c} + \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq b}} \delta_{b,k} \delta_{c,k}$$
$$= 1 \times 1 + (0 + \dots + 0) = 1.$$