

Exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Exponentielle de matrice

1.1 norme sous-multiplicative

Exercice 1 (d'après B.E.O. n° 61) : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

1. On admet que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que ce n'est pas une norme sous-multiplicative. Connaissez-vous une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$.
Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

Dans toute la suite, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative.

Définition - propriété 1

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de la matrice A* et est notée $\exp(A)$ ou e^A : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Il s'agit d'une matrice.

$$\exp(I_n) =$$

$$\exp(0_n) =$$

1.2 exponentielle et réduction

Propriété 1

Pour D matrice diagonale, égale à $\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$, on a $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{pmatrix}$.

Propriété 2 – cas de matrices semblables

Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et A et B matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $A = PBP^{-1}$. Alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables et

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

Méthode – cas d’une matrice diagonalisable

Si A est diagonalisable, pour calculer $\exp(A)$, on peut diagonaliser $A : A = PDP^{-1}$ et utiliser

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner $\text{Sp}(A)$ dans le cas où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En déduire e^A et son spectre.

Propriété 3

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable, $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable et $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

2 Exponentielle d’un endomorphisme

Définition - propriété 2

Pour u endomorphisme de E , la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de u* et est notée e^u ou $\exp(u)$. Il s’agit d’un endomorphisme de E .

$$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$$

Propriété 4

Soit \mathcal{B} une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice de $\exp(u)$ dans la base \mathcal{B} est $\exp(A)$.

3 Continuité de l’exponentielle

Propriété 5

- L’application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L’application $u \mapsto e^u$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

4 À suivre...

Il nous restera à étudier la dérivation de $t \mapsto \exp(tu)$ et $t \mapsto \exp(tA)$, et à montrer que pour A et B matrices qui commutent, et a et b endomorphismes qui commutent, on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{et} \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

5 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Définition-propriété 1

On a $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Il faut éventuellement réexpliquer $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour notre norme sous-multiplicative.

Propriété 1

$$\sum_{k=0}^m \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{d_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^m \frac{d_n^k}{k!} \end{pmatrix} \text{ et il n'y a plus qu'à faire tendre } m \text{ vers } +\infty.$$

Remarque : limite d'une matrice a été rencontrée dans Espaces vectoriels normés.

Propriété 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$ et donc $\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!}\right)P^{-1}$. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, espace de dimension finie, donc est continue. On obtient donc en faisant tendre m vers l'infini : $\exp(A) = P \exp(B)P^{-1}$.

Propriété 3

Soit A trigonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Il existe P inversible et T triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

$$\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^m \frac{T^k}{k!}\right)P^{-1}$$

on a vu en algèbre que T^k était triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux étaient les λ_i^k

$$= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit \mathcal{T} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. \mathcal{T} est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de di-

mension finie, donc \mathcal{T} est fermé. Donc la limite des matrices $\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$ (qui existe, c'est $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{T^k}{k!} = e^T$)

est dans \mathcal{T} , autrement dit est triangulaire supérieure.

Par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ (application linéaire en dimension finie), $e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ et on lit les valeurs propres sur la diagonale.

Définition-propriété 2

Semblable à celle sur les matrices en prenant une norme subordonnée (par exemple, pour la sous-multiplicativité) dans $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 4

Pour tout m , $\text{mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^m \frac{u^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))^k}{k!}$.

Le membre de droite tend vers $\exp(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$. Qu'en est-il du membre de gauche ?

On introduit $\psi : \begin{pmatrix} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{pmatrix}$. ψ est une application linéaire en dimension finie donc ψ est continue. Donc le membre de gauche tend vers $\text{mat}_{\mathcal{B}}(e^u)$.

Propriété 5

Soit $r > 0$. Montrons que $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur $B_f(0, r)$.

Pour $A \in B_f(0, r)$, $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{r^k}{k!}$, donc

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_{\infty, B_f(0, r)} \leq \frac{r^k}{k!}$$

et il y a convergence normale, donc uniforme.

Les fonctions $A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ sont toutes continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par le théorème de transmission de continuité, \exp est continue sur $B_f(0, r)$. Ceci étant valable pour tout r , \exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut rédiger de même la continuité de \exp sur $\mathcal{L}(E)$.