Centrale 2024 MP - MPI

I Inégalité de Knopp

Q1) Soit φ continue et convexe sur J.

(*) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\times\frac{1}{n}\right) \underset{\varphi \text{ convexe}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\varphi\left(f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right)$

- Comme f est continue sur $[a,b]$, par le théo des sommes de Riemann ;

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\times\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

f est à valeurs dans J, donc $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$ (qui existent par le théo des bornes atteintes) sont dans J.

$\forall t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$

$$(\ldots)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

et donc $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \in J$.

φ est continue sur J, donc $\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right)$

- $\varphi\circ f$ est continue sur $[a,b]$ donc par le théo de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right) = \int_a^b \varphi\circ f(t)\,dt.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,dt$$

- On passe à la limite qd $n\to+\infty$ dans (*) et on a l'inégalité de Jensen.