Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Généralités

1. Équation différentielle linéaire : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Forme matricielle : système différentiel linéaire $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée.
2. Principe de superposition.
3. Problème de Cauchy. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
4. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.
5. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.

Solutions d'une équation différentielle linéaire

6. Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
7. Cas des équations scalaires d'ordre n.
8. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions.
9. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
10. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n.
11. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées.
12. Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

13. Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.
14. Exponentielle d'une matrice diagonale.
15. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$, de $t \mapsto \exp(tA)$.
16. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

17. Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a\,(x)\,, \quad x(t_0) = x_0$$

    si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E. Traduction matricielle.

18. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.

Variation des constantes

19. Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions.
20. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Nous connaissons jusqu'à présent :

— les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : $y' + a(t)y = b(t)$

— les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants : $y'' + ay' + by = c(t)$.

Nous avons maintenant essentiellement deux objectifs :

— pour l'ordre 1, étendre les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 de première année aux fonctions vectorielles (étude des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1),

— pour l'ordre 2, étendre l'étude au cas des coefficients non constants.

1 Généralités

1.1 vocabulaire et notations

Définition 1

On appelle *système différentiel linéaire d'ordre 1* toute équation différentielle de la forme

$$X' \;=\; A(t)X \;+\; B(t)$$

où

- $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue
- $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue
- $X : I \to \mathbb{K}^n$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$.

Un tel système s'écrit :

$$(\text{Syst}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{1,1}(t)x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}(t)x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{array} \right.$$

Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système et les b_i sont les seconds membres.
Le système linéaire *homogène*, ou *sans second membre*, associé à (Syst) est : $X' = A(t)X$.

Exemples :

- Si $n = 1$, le système se résume à une équation différentielle linéaire *scalaire* d'ordre 1 :

$$x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + b_1(t) \quad \text{du type} \quad y' + \alpha(t)y = \beta(t)$$

- Le système différentiel $\begin{cases} x' & = tx + \cos(t)y - 1 \\ y' & = e^t x - 2y + t^4 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $X' = A(t)X + B$ avec

- L'équation différentielle $y'' = 5y' - 3y + 2te^t$ s'écrit aussi sous forme de système différentiel linéaire :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2te^t \end{pmatrix}$$

— De manière plus générale, toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + B$$

où $A =$ et $B =$

Définition 2 – équation différentielle liée à une application linéaire a

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1* une équation de la forme

$$x' \ = \ a(t)(x) \ + \ b(t)$$

où

- $a : I \to \mathscr{L}(E)$ est continue
- $b : I \to E$ est continue
- $x : I \to E$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour t réel, $a(t)$ est une application linéaire sur E et x est à valeurs dans E.
Attention à bien comprendre $a(t)(x)$ comme $[a(t)](x)$.
Il est courant de noter $a(t) \cdot x$ à la place, en pensant au parallèle matriciel : $A(t)X$.

— Si on munit E d'une base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle liée à l'application linéaire a s'écrit matriciellement $X' = A(t)X + B(t)$, avec des correspondances matricielles que vous n'avez pas de mal à établir. Nous utiliserons surtout la forme matricielle en cours car elle est de lecture plus facile, et on pourra parler d'équation différentielle à la place de système différentiel.

— On appelle *problème de Cauchy* une équation différentielle linéaire assortie d'une *condition initiale* :

$$\begin{cases} X' & = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

Propriété 1 – mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

Soit $f : I \to E$.

f est une solution au problème de Cauchy en (t_0, x_0) : $\begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$ si, et seulement si, f est continue et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(f(s)) + b(s))\, \mathrm{d}s$$

1.2 structure de l'ensemble des solutions

Propriété 2 – principe de superposition

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et $B = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$.
Si X_1 est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B_1$ et X_2 est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B_2$, alors $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ est solution de l'équation différentielle $X' = AX + B$.

Théorème 1 – Théorème de Cauchy linéaire (admis)

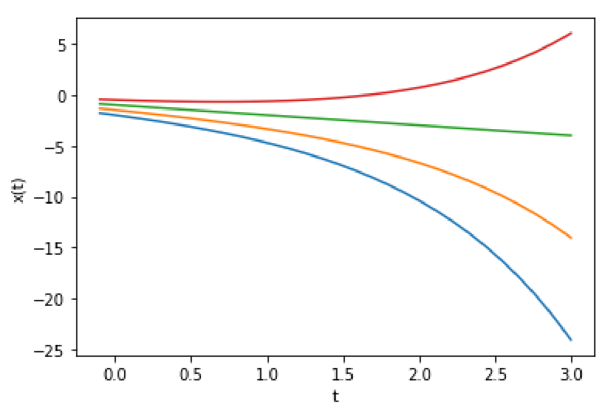
Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues sur l'intervalle I.
Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une et une seule solution X de l'équation différentielle $X' = A(t)X + B(t)$ vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.
Autrement dit, le problème de Cauchy

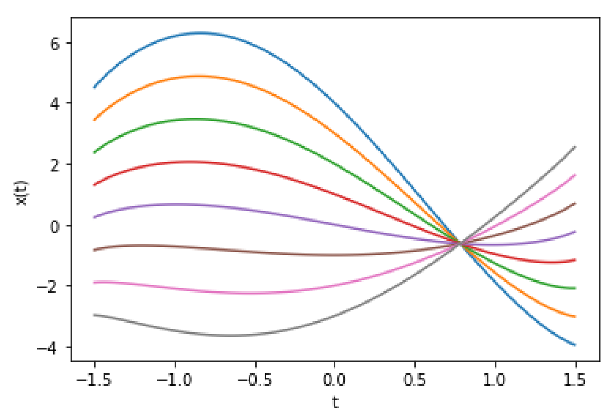
$$\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarque : si Y et Z sont deux solutions distinctes de l'équation différentielle $X' = A(t)X + B(t)$, alors $\forall t \in I$, $Y(t) \neq Z(t)$.

Voici deux exemples de courbes de fonctions solutions d'une équation différentielle.
À gauche : $x' = x + t$ et à droite : $x'' + x = \tan t$.





Propriété 3 – espace des solutions

Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues sur l'intervalle I. On considère l'équation différentielle

$$(\text{Syst}) \quad X' = A(t)X + B(t)$$

et on note (H) l'équation homogène associée : $X' = A(t)X$.

- L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension finie égale à n.
- L'ensemble $\mathcal{S}_{\text{Syst}}$ des solutions de (Syst) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $\mathcal{S}_H$.

Exercice 1 : On s'intéresse à l'équation différentielle $X' = A(t)X + B(t)$ où $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & -\frac{1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{1+t^2} \\ \frac{1-t}{1+t^2} \end{pmatrix}$

1. Quelles équations différentielles liées à A satisfont $V_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $V_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$?
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $X' = A(t)X + B(t)$.

Corollaire 1 – cadre des équations différentielles scalaires d'ordre n

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre n :

$$(E) : \quad y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

et (H) l'équation différentielle homogène associée.

- L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension finie égale à n.
- L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_H$.

Pour tout $(t_0, x_0, \ldots x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$, le théorème de Cauchy linéaire assure qu'il existe une et une seule solution de (E) vérifiant :

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

Par exemple, sans calculs, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \sin(t)y' + \cos(t)y = e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit (E) l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 8e^t$. On peut vérifier que $f : t \mapsto t^2 e^t$ est solution de (E), et que les fonctions

$$f_1 : t \mapsto e^t \quad f_2 : t \mapsto te^t \quad f_3 : t \mapsto e^{-t} \quad f_4 : t \mapsto te^{-t}$$

sont solutions de l'équation homogène (H). Résoudre (E).

1.3 méthode de variation des constantes

Nous ne savons résoudre (E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ que lorsqu'on nous donne des solutions particulières, et suffisamment ! Comment trouver de telles solutions particulières ?

Lorsque (H) est résolue, il existe une méthode, la méthode de variation des constantes. Elle est au programme uniquement dans le cas $n = 2$. Expliquons le principe général avant de la détailler, dans la section suivante, pour $n = 2$. Supposons que l'on connaisse une base de $\mathcal{S}_H$: $(e_1, \ldots, e_n)$. On recherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$f : t \mapsto c_1(t)e_1(t) + c_2(t)e_2(t) + \cdots + c_n(t)e_n(t)$$

On voit bien les « constantes qui varient ».

$$\begin{aligned} f'(t) &= c_1'(t)e_1(t) + \cdots + c_n'(t)e_n(t) + c_1(t)e_1'(t) + \cdots + c_n(t)e_n'(t) \\ &= c_1'(t)e_1(t) + \cdots + c_n'(t)e_n(t) + c_1(t)A(t)e_1(t) + \cdots + c_n(t)A(t)e_n(t) \\ &\quad \text{les } c_i(t) \text{ sont des scalaires} \\ &= c_1'(t)e_1(t) + \cdots + c_n'(t)e_n(t) + A(t)(c_1(t)e_1(t) + \cdots + c_n(t)e_n(t)) \\ &= c_1'(t)e_1(t) + \cdots + c_n'(t)e_n(t) + A(t)f(t) \end{aligned}$$

f est solution de E si et seulement si $c_1'(t)e_1(t) + \cdots + c_n'(t)e_n(t) = B(t)$.

Exercice 3 : On étudie le système différentiel

$$(\text{Syst}) \quad \begin{cases} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 + e^t \\ x_2' &= x_1 + e^t \end{cases} \quad \text{et on note } (H) : \quad \begin{cases} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{cases}$$

On remarque que $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $Z(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ sont solutions de (H). Rechercher une solution particulière de (Syst) par la méthode de variation des constantes. En déduire la résolution de (Syst).

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 et wronskien

Dans cette partie, a, b et c sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse aux équations différentielles :

$$\begin{aligned} (E) : &\qquad x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ (H) : &\qquad x'' = a(t)x' + b(t)x \end{aligned}$$

Nous avons appris que $\mathcal{S}_H$ était un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et que $\mathcal{S}_E$ était de la forme $x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$, où x_{part} est une solution particulière de (E). Nos objectifs sont ici :

- de décider facilement, avec l'outil *wronskien*, si deux solutions de (H) forment une base de (H),
- de mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour obtenir une solution particulière de (E).

2.1 wronskien

Définition 3

Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation homogène (H). On appelle *wronskien* de ces deux solutions, l'application

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

Propriété 4

Le wronskien est un outil permettant de caractériser les bases de solutions de (H), car les assertions suivantes sont équivalentes (en conservant les notations de la définition) :

1. (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_H$.
2. Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.
3. Il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

Exercice 4 :

1. Montrer que le wronskien de deux solutions de (H) est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 $x' = a(t)x$.
2. Qu'en déduit-on pour le wronskien d'un couple de solutions de l'équation différentielle $x'' + q(t)x = 0$ avec q fonction continue sur I ?

2.2 méthode de variation des constantes

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}'}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

Soit (x_1, x_2) une base de $\mathcal{S}_H$, où $(H) : x'' = a(t)x' + b(t)x$. Par la propriété du wronskien, $(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière de $X' = A(t)X + B(t)$ sous la forme

$$X(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t)$$

Comme on l'a vu plus haut, X est solution de $X' = A(t)X + B(t)$ si et seulement si $c_1'(t)X_1(t) + c_2'(t)X_2(t) = B(t)$, soit encore $\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) & = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) & = c(t) \end{cases}$. Comme $W(t) \neq 0$, le système donnant $c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ est de Cramer. En primitivant, on trouve $c_1(t)$ et $c_2(t)$.

Méthode – variation des constantes

Si on connaît une base (x_1, x_2) des solutions de $x'' = a(t)x' + b(t)x$, on recherche une solution particulière de $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ sous la forme $c_1x_1 + c_2x_2$. On met l'équation différentielle sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Les dérivées de c_1 et c_2 sont solutions de :

$$c_1{}'(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1{}'(t) \end{pmatrix} + c_2{}'(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2{}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Résoudre $(E) : y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t^2}$.

3 Retour sur l'exponentielle de matrice, d'endomorphisme

Dans toute la suite, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative.

Définition - propriété 1

- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de la matrice* A et est notée $\exp(A)$ ou e^A : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Il s'agit d'une matrice.
- Pour u endomorphisme de E, la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ converge absolument. Sa somme est appelée *exponentielle de* u et est notée e^u ou $\exp(u)$. Il s'agit d'un endomorphisme de E.

$$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$$

Dans la suite, je vous laisse adapter les propriétés d'exponentielle de matrices aux exponentielles d'endomorphisme.

Propriété 5

Pour D matrice diagonale, égale à $\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$, on a $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_n} \end{pmatrix}$

Propriété 6

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice de $\exp(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\exp(A)$.

Propriété 7

L'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : t \mapsto e^{tA}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = Ae^{tA}$.

Terminons par une propriété qui n'a pas encore été démontrée et que nous démontrons dans ce chapitre.

Propriété 9

Pour A et B matrices qui commutent, et a et b endomorphismes qui commutent, on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{et} \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

4 Résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

Propriété 10

On considère l'équation différentielle homogène $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions est

$$\left\{t \mapsto e^{tA}V,\ V \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Remarque : La solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' & = AX \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}$ est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

Méthode – cas où A est diagonalisable

Si A est diagonalisable, on écrit $A = PDP^{-1}$ avec A inversible et D diagonalisable.
On pose $Y = P^{-1}X$.
On a $X' = AX$ si, et seulement si, $Y' = DY$.
On sait résoudre cette équation différentielle.
On conclut en écrivant $X = PY$.

— Au cours des exercices, vous vous apercevrez qu'avec cette méthode, il n'est pas absolument nécessaire de calculer des exponentielles de matrices (c'est comme vous voudrez/pourrez, en fonction aussi de l'énoncé).

— La démarche est sensiblement la même quand A est trigonalisable.

Exercice 6 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1' & = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' & = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

Exercice 7 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' & = 2y + 2z \\ y' & = -x + 3y - z \\ z' & = 3x - 3y + z \end{cases}$

5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées

Les équations différentielles scalaires rencontrées dans ce chapitre :

$$y' = a(t)y + b(t) \quad \text{ou} \quad y'' = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$$

sont des équations *normalisées*, parce que le coefficient à côté de $y^{(n)}$ vaut 1.

Plan d'étude fréquent des équations non normalisées

On peut rencontrer des équations différentielles *non normalisées* :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad \text{ou} \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$$

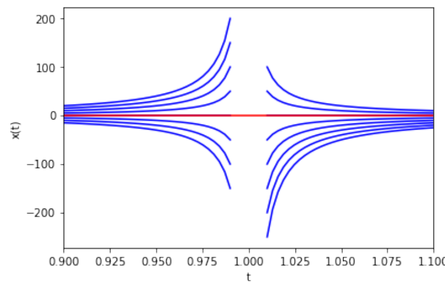
— Si la fonction a ne s'annule pas sur I, diviser par $a(t)$ permet de se ramener à une forme normalisée.

— Sinon, on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a ne s'annule pas. On cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier. C'est ce qu'on appelle le problème du *raccord* des solutions, qui doivent être dérivables (respectivement deux fois dérivables) sur l'intervalle I.

Remarques (hors-programme) : pour une équation non normalisée, le principe de superposition est encore valable, ainsi que la structure d'espace vectoriel/affine de l'ensemble des solutions. En revanche, la dimension de $\mathcal{S}_H$ n'est plus nécessairement égale à l'ordre de l'équation, et le théorème de Cauchy ne s'applique plus.

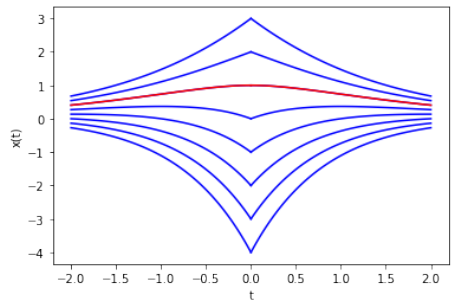
Exercice 8 : Résoudre l'équation différentielle

$$(1-t)x' - x = t$$



Exercice 9 (entraînement personnel) :
Résoudre l'équation différentielle

$$ty' + |t|y = te^{-|t|}$$



6 Exemple de recherche de solutions développables en série entière

Exercice 10 : Rechercher les solutions de (E) développables en série entière, où

$$(E): \quad tx'' + 2x' + tx = 0$$

On notera que nous n'aurons pas résolu (E), mais seulement trouvé les solutions développables en série entière.

7 Illustrations concernant le rôle des valeurs propres de la matrice A dans $X' = AX$ (simple découverte)

Cette section n'est pas à connaître par cœur. Il s'agit d'une suggestion de découverte : *« concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle des valeurs propres de la matrice »*.

On s'intéresse à une trajectoire $X : t \mapsto (x(t), y(t))$ solution de l'équation différentielle $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La tangente en t_0 à cette trajectoire est le vecteur

$$\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = X'(t_0) = AX(t_0) = \begin{pmatrix} ax(t_0) + by(t_0) \\ cx(t_0) + dy(t_0) \end{pmatrix}$$

Connaissant A, sans avoir résolu l'équation différentielle, nous pouvons tracer, en un point d'abscisse x et d'ordonnée y, le vecteur $v = (ax + by, cx + dy)$. Le tracé de nombreux vecteurs v est un *champ de vecteurs*. On peut l'obtenir en Python avec `plt.quiver` après l'import `import matplotlib.pyplot as plt`.

Le chemin que l'on suit en partant d'un point et en suivant naturellement les vecteurs est une *ligne de champ*, et nous donne une bonne idée d'une trajectoire solution de l'équation différentielle.
On veut maintenant étudier le comportement quand $t \to +\infty$ des trajectoires.

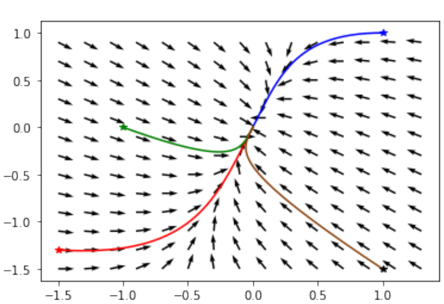
Cas où A a deux valeurs propres réelles
On note $\lambda_1 < \lambda_2$ les valeurs propres de A ; V_1 vecteur propre associé à λ_1, V_2 vecteur propre associé à λ_2. A est diagonalisable et la méthode de résolution de l'équation $X' = AX$ conduit à l'existence de c_1 et c_2 constantes réelles telles que :

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

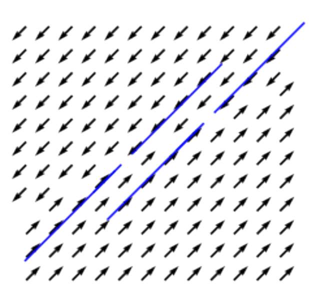
Avec $X(t) = e^{\lambda_2 t}(c_2 V_2 + c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} V_1)$, on conjecture les comportements suivants quand $t \to +\infty$.

1. Si $\lambda_2 < 0$, les trajectoires convergent vers 0 avec une tangente de vecteur directeur V_2.
2. Si $\lambda_2 = 0$, les trajectoires convergent vers des points avec une tangente de vecteur directeur V_2.
3. Si $\lambda_2 > 0$, les trajectoires divergent en prenant la direction de V_2.

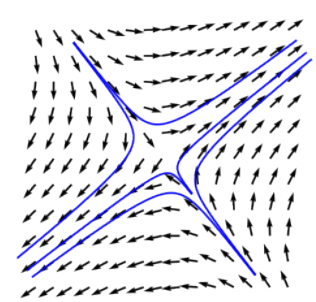
$\lambda_2 < 0$



$\lambda_2 = 0$



$\lambda_2 > 0$



Cas où A n'a qu'une valeur propre

On n'étudie pas ce cas, mais l'étude serait assez similaire à celle du paragraphe précédent.

Cas où A a deux valeurs propres complexes non réelles

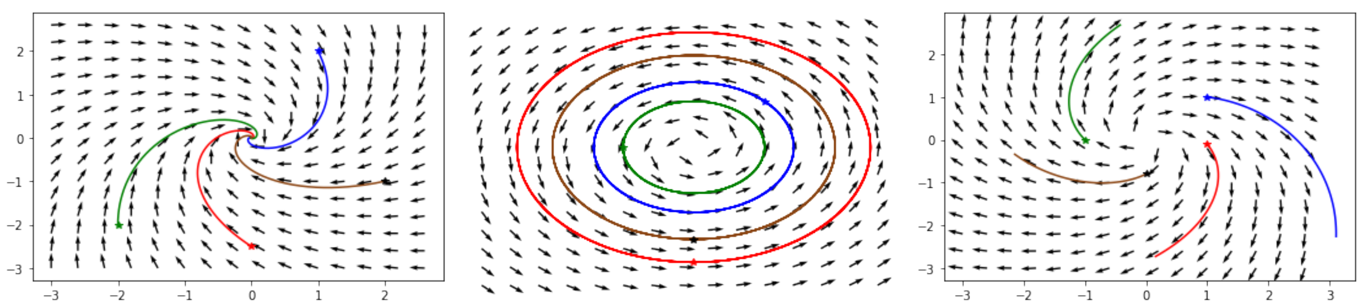
Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les valeurs propres sont conjuguées. On les note $r \pm \mathrm{i}\omega$ avec r, ω réels. On considère V_1 vecteur propre associé à $r + \mathrm{i}\omega$. On a cette fois $X(t) = e^{rt}(c_1 e^{\mathrm{i}\omega} V_1 + c_2 e^{-\mathrm{i}\omega} \overline{V})$ et on arrive à remettre $X(t)$ sous la forme réelle suivante

$$X(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \\ \mu \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

et on conjecture les comportements suivants quand $t \to +\infty$. La discussion est menée en fonction de r, partie réelle des valeurs propres de A.

1. Si $r < 0$, les trajectoires convergent vers 0 en s'enroulant vers ce point.
2. Si $r = 0$, les trajectoires sont fermées.
3. Si $r > 0$, les trajectoires divergent en spirale.

$\boxed{r < 0}$ $\boxed{r = 0}$ $\boxed{r > 0}$



8 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 1

- Si X est solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$, alors X est dérivable et X' est continue sur I : X est $\mathcal{C}^1$ sur I. Et pour tout s dans I, $X'(s) = A(s)X(s) + B(s)$.

Soit $t \in I$, on intègre de t_0 à t :

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,\mathrm{d}s \text{ puis } X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,\mathrm{d}s$$

- Réciproquement, si pour tout $t \in I$, $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,\mathrm{d}s$, alors :
  - en évaluant en t_0, on trouve $X(t_0) = X_0$,
  - par le théorème fondamental de l'intégration, dans le cadre des fonctions vectorielles ici, X est dérivable et $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Propriété 3

- Montrons que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension finie égale à n.

On a vu que $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ au début de la démonstration précédente.
$0' = A(t) \times 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_H$
Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{S}_H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$(\lambda X_1 + X_2)' \;=\; \lambda X_1' + X_2' \;=\; \lambda A(t)X_1 + A(t)X_2 \;=\; A(t)(\lambda X_1 + X_2)$$

donc $\lambda X_1 + \lambda X_2 \in \mathcal{S}_H$.
Par ces trois points, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

L'application $\begin{pmatrix} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{pmatrix}$ est une application linéaire. Par le théorème de Cauchy linéaire, elle est bijective. C'est un isomorphisme et $\dim \mathcal{S}_H = \dim \mathbb{K}^n = n$.

- Montrons que l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_H$.

Soit X_{part} une solution particulière de $X' = A(t)X + B$ (il y en a par le théorème de Cauchy linéaire).

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X'_{\text{part}} &= A(t)X_{\text{part}} + B(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X' - X'_{\text{part}} &= A(t)X - A(t)X_{\text{part}} \\ X'_{\text{part}} &= A(t)X_{\text{part}} + B(t) \end{cases} \Leftrightarrow (X - X_{\text{part}}) \in \mathcal{S}_H \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_E = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$.

Corollaire 1

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + B \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on applique les théorèmes rencontrés sur les systèmes différentiels linéaires.

Propriété 4

Par le théorème de Cauchy linéaire, $\psi_t : \begin{pmatrix} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^2 \\ f & \mapsto & \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

Montrons $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $(1) \Rightarrow (2)$

On suppose que (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_H$. Soit $t \in I$. L'image d'une base par un isomorphisme est une base, donc $(\psi_t(x_1), \psi_t(x_2)) = (\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{K}^2$. Le déterminant de cette famille est non nul.

- (2) $\Rightarrow$ (3) est évident.

- (3) $\Rightarrow$ (1)

On suppose qu'il existe t tel que $W(t) \neq 0$. Alors $(\psi_t(x_1), \psi_t(x_2))$ est une base de $\mathbb{K}^2$. L'image de cette base par ψ_t^{-1} est une base donc (x_1, x_2) est une base de $\mathcal{S}_H$.

Définition-propriété 1

Il faut éventuellement réexpliquer $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ pour notre norme sous-multiplicative. On a $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$.

Semblable à celle sur les matrices en prenant une norme subordonnée (par exemple, pour la sous-multiplicativité) dans $\mathscr{L}(E)$.

Propriété 5

$\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{d_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{d_1^k}{k!} \end{pmatrix}$ et il n'y a plus qu'à faire tendre m vers $+\infty$.

Remarque : limite d'une matrice a été rencontrée dans Espaces vectoriels normés.

Propriété 6

Pour tout m, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}) = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u))^k}{k!}$.

Le membre de droite tend vers $\exp(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u))$. Qu'en est-il du membre de gauche ?

On introduit $\psi : \begin{pmatrix} \mathscr{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{pmatrix}$. ψ est une application linéaire en dimension finie donc ψ est continue. Donc le membre de gauche tend vers $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e^u)$.

Propriété 7

On rappelle qu'il existe une norme sous-multplicative $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la continuité de

$$\exp : A \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(A) \text{ où } f_k(A) = \frac{A^k}{k!}$$

- Les fonctions $f_k : A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ sont toutes continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, dans la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les composantes de la fonction f_k sont des fonctions polynomiales en les coefficients de A.

- Montrons que $\sum f_k$ converge normalement sur toute boule fermée $B_f(0,r)$, où $r > 0$.

Pour $A \in B_f(0,r)$, $\|\frac{A^k}{k!}\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!} \leqslant \frac{r^k}{k!}$, donc

$$\|f_k\|_{\infty,\, B_f(0,r)} = \sup_{A\in B_f(0,r)} \|f_k(A)\| \leqslant \frac{r^k}{k!}$$

La série numérique $\sum \frac{r^k}{k!}$ converge. Par comparaison, $\sum \|f_k\|_\infty$ converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $B_f(0,r)$.

Par le théorème de transmission de continuité, exp est continue sur $B_f(0,r)$. Ceci étant valable pour tout r, exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut rédiger de même la continuité de exp sur $\mathscr{L}(E)$.

Propriété 8

On rappelle qu'il existe une norme sous-multplicative $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la dérivabilité de

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

- Les fonctions $f_k : t \mapsto \frac{t^k A^k}{k!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (car $\|\frac{(tA)^k}{k!}\| \leqslant \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!}$; la série numérique $\frac{(|t|\|A\|)^k}{k!}$ converge ; par comparaison, la série numérique $\sum \|\frac{(tA)^k}{k!}\|$ converge, autrement dit $\sum\limits_k f_k(t)$ converge absolument, donc converge).

- Soit $r > 0$; on travaille sur $[-r, r]$. On a $f_k'(t) = \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$ donc pour $t \in [-r, r]$, $\|f_k'(t)\| \leqslant \frac{(r\|A\|)^{k-1}\|A\|}{(k-1)!}$ et donc

$$\|f_k'\|_{\infty,\,[-r,r]} \leqslant \frac{(r\|A\|)^{k-1}\|A\|}{(k-1)!}$$

La série de fonctions $\sum f_k'$ converge normalement sur le segment $[-r, r]$, donc uniformément.

Par le théorème de dérivation terme à terme, $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-r, r]$ pour tout r (donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) et sa dérivée est donnée par :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^{j+1}}{j!} = Ae^{tA} \text{ ou aussi, } e^{tA}A$$

Propriété 9 – la démonstration constitue un bel ensemble de révisions de topologie ♡

> Lemme 1
>
> Si les matrices A et B commutent, alors les matrices e^A et B commutent.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(tA)^k B = B(tA)^k$. Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!} B = B \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}$.

On a $\sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{tA}$.

Les applications $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & MB \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & BM \end{pmatrix}$ sont des applications linéaires avec un espace de départ de dimension finie donc elles sont continues. Donc $\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}) B = e^{tA}B$ et $\lim_{n\to+\infty} (B \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}) = Be^{tA}$.

Par unicité de la limite, $e^{tA}B = Be^{tA}$.

On introduit $f(t) = e^{t(A+B)}$ et $g(t) = e^{tA}e^{tB}$.
Par la propriété 8, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(t) = (A + B)e^{t(A+B)} = (A + B)f'(t)$.
Par ailleurs, le produit matriciel $\psi(M, N) = MN$ est une application bilinéaire sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ espace de dimension finie. Comme $g(t) = \psi(h_A(t), h_B(t))$ où $h_M(t) = e^{tM}$, on sait par le chapitre Fonctions vectorielles
(propriété « $[B(k, h)]' = B(k', h) + B(k, h')$ ») que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \psi(h_A'(t), h_B(t)) + \psi(h_A(t), h_B'(t)) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} \\ &= Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} \text{ par le lemme} \\ &= (A + B)g(t) \end{aligned}$$

Enfin, $f(0) = I_n = g(0)$.

Finalement, f et g sont solutions du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' = (A + B)y \\ y(0) = I_n \end{cases}$. Par théorème de Cauchy linéaire, $f = g$. Et donc $e^{A+B} = f(1) = g(1) = e^A e^B$.

Propriété 10

Pour $V \in \mathbb{K}^n$, notons $X(t) = e^{tA}V = f(t)V$ avec $f(t) = e^{tA}$. L'application $L : M \mapsto MV$ est une application linéaire d'ensemble de départ de dimension finie. Donc le chapitre Fonctions vectorielles (propriété $[L(f)]' = L(f')$) nous assure que $X'(t) = f'(t)V = Ae^{tA}V = AX(t)$.

Soit $F = \{t \mapsto e^{tA}V,\ V \in \mathbb{K}^n\}$. Par ce qui précède, $F \subset \mathcal{S}_H$.

L'application $\psi : V \mapsto (t \mapsto e^{tA}V)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans F (ψ est linéaire, surjective par définition de F, et si $\psi(V) = 0$ alors en évaluant en 0, $e^{0.A}V = 0$ donc $V = 0$). Donc $\dim F = \dim \mathbb{K}^n = n$.

On a $F \subset \mathcal{S}_H$ et ces deux espaces vectoriels sont de dimension n. Ils sont donc égaux.