Équations différentielles scalaires
Révisions du cours de première année

1. Connaître le vocabulaire : équation différentielle, équation homogène associée, ordre.
2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 :
   - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène,
   - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
   - savoir trouver des solutions particulières par la méthode de la variation de la constante.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :
   - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène dans le cas complexe et dans le cas réel,
   - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
   - savoir trouver des solutions particulières dans trois situations : second membre polynomial, second membre Ae^{rx}, second membre $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$.
4. Penser au principe de superposition en exercices.
5. Existence et unicité au problème de Cauchy.

---

1 Généralités sur les équations linéaires

Si T est une application linéaire, toute équation de la forme $T(y) = b$, où b est fixé et y est l'inconnue, est appelée *équation linéaire* et b est *le second membre*.
Lorsque $b = 0$, on dit que l'équation est *homogène*. L'équation $T(y) = 0$ est l'équation homogène associée à l'équation $T(y) = b$.

Imaginons que nous disposions d'au moins une solution y_{part} à l'équation $T(y) = b$. Cette solution a pu être repérée au coup dœil, par intuition, par une méthode apprise, ou nous être fournie par l'énoncé. On parle de *solution particulière*. Comment, dès lors, obtenir toutes les solutions de l'équation $T(y) = b$?

$$
\begin{aligned}
T(y) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} T(y) & = b \\ T(y_{part}) & = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(y) & = b \\ T(y) - T(y_{part}) & = b - b = 0 \end{cases} \\
&\qquad \text{et par linéarité de } T \text{ :} \\
&\Leftrightarrow \quad T(y - y_{part}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y - y_{part} \text{ est solution de l'équation homogène associée} \\
&\Leftrightarrow \quad y \text{ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène}
\end{aligned}
$$

> Pour trouver toutes les solutions d'une équation linéaire $T(y) = b$, il suffit de connaître **une** solution particulière et **toutes** les solutions de l'équation homogène associée.

Propriété 1 – principe de superposition

Si y_1 est une solution de l'équation $T(y) = b_1$ et y_2 est une solution de l'équation $T(y) = b_2$, alors pour λ_1 et λ_2 réels, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'équation $T(y) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Équations différentielles

Une *équation différentielle* est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction, et qui fait aussi intervenir des dérivées de cette fonction. *L'ordre* de l'équation est le nombre maximal de fois où la fonction est dérivée. La fonction en jeu est notée y.

Par exemple, l'équation $y^{(5)} = \frac{1}{2}(y + y')$ est une équation différentielle d'ordre 5. On en connaît des solutions particulières :

L'équation différentielle $y'' + xy' + x^2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2. L'apparition de x sous-entend que la variable des fonctions est x. On en connaît une solution particulière $y_{part} : x \mapsto$

Résoudre des équations différentielles est en général un problème ardu. En MPSI, on se limite à l'étude des équations différentielles de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (équation différentielle linéaire du premier ordre)
- $y'' + ay' + by = f(x)$ (équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

où a, b et f sont des fonctions réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (les fonctions a et b étant constantes dans le deuxième cas), et l'inconnue y peut être recherchée comme fonction à valeurs réelles ou à valeurs complexes.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient a et b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Soit T qui à y dérivable associe $y' + ay$. T est une application linéaire et l'équation différentielle est bien de la forme $T(y) = b$ avec T linéaire.

Comme expliqué en introduction, en notant (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ l'équation différentielle et (H) : $y' + a(x)y = 0$ l'équation différentielle homogène associée, toute solution y de (E) s'obtient comme somme d'une solution particulière et d'une solution de (H).

Solution générale de (E) = Solution particulière de (E) + Solution générale de (H)

Propriété 2

Soit A une primitive de a sur I. Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto ce^{-A(x)}$ pour c décrivant $\mathbb{K}$.

Exercice 1 : Résoudre $y' - \dfrac{1}{t(t+1)}y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$.

Méthode – variation de la constante

Pour rechercher une solution particulière, on dispose de *la méthode de la variation de la constante*. L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto c(x)e^{-A(x)}$ (c n'est plus une constante, d'où le nom donné à la méthode).

Exercice 2 : En utilisant le principe de superposition, résoudre l'équation différentielle suivante sur $I =]0, +\infty[$.

$$(E) : \; y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2} + t\sin t$$

Propriété 3

Soient a et b des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, x_0 un point de I et y_0 une valeur de $\mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y & = b(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution.

Un problème de Cauchy est un système comportant une équation différentielle et une ou plusieurs conditions initiales (valeur de y en un point, valeur de y' en un point).

Exercice 3 : Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - (\frac{2t-1}{t^2})y & = 1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ y(1) & = 0 \end{cases}$

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient a et b dans $\mathbb{K}$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre **à coefficients constants** $y'' + ay' + by = f(t)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables et telles que

$$\forall t \in I, \; y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

Remarque : soit T qui à y dérivable associe $y'' + ay' + by$. Comme plus haut, on peut vérifier que T est linéaire et l'équation différentielle est bien de la forme $T(y) = f$ avec T linéaire.

Comme expliqué en introduction, en notant $(E) : \; y'' + ay' + by = f$ l'équation différentielle et $(H) : \; y'' + ay' + by = 0$ l'équation différentielle homogène associée, toute solution y de (E) s'obtient comme somme d'une solution particulière et d'une solution de (H).

$$\boxed{\text{Solution générale de } (E)} = \boxed{\text{Solution particulière de } (E)} + \boxed{\text{Solution générale de } (H)}$$

Le principe de superposition reste lui aussi valable.

3.1 résolution de l'équation homogène

Le polynôme $X^2 + aX + b$ est le *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle.

Propriété 4 – cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique de (H).

- Si $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

- Si $r_1 = r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Exercice 4 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - y' - 12y = 0$. $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-3x}, x \mapsto e^{4x})$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$. $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^{-2x}, x \mapsto xe^{-2x})$

Propriété 5 – cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines réelles $r_1 \neq r_2$ alors les solutions de (H) sont de la forme
$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- Si le polynôme caractéristique de (H) admet une unique racine réelle r alors les solutions de (H) sont de la forme
$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- Si le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines complexes non réelles $r - i\omega$ et $r + i\omega$ alors les solutions de (H) sont de la forme
$$t \mapsto e^{rt}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
ou encore
$$t \mapsto \alpha e^{rt} \cos(\omega t - \varphi), \quad (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$. $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(x \mapsto e^{x}, x \mapsto e^{2x})$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(x \mapsto e^{x}, x \mapsto xe^{x})$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$. $\mathcal{S}_3 = \text{Vect}(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = 0$.
$\mathcal{S}_4 = \text{Vect}(x \mapsto \cos(3x)e^{-x}, x \mapsto \sin(3x)e^{-x})$

3.2 recherche d'une solution particulière

Nous verrons, dans le chapitre suivant, une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2. Voici les cas particuliers au programme de MPSI.

Propriété 6 – second membre polynomial

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = P(t)$ admet une solution particulière polynomiale de degré au plus $\deg(P) + 2$, et plus précisément :

— de degré $\deg(P)$ si $b \neq 0$,

— de degré $\deg(P) + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$,

— de degré $\deg(P) + 2$ si $a = b = 0$ (cas facile de toute façon en primitivant $y'' = P(t)$).

Par exemple, pour rechercher une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = t$, je peux la rechercher sous la forme $\alpha t + \beta$, et par calcul de dérivées, nous sommes amenés à résoudre
$$0 + \alpha + (\alpha t + \beta) = t$$
et on trouve comme solution particulière de (E) : $y_{part}(t) = t - 1$.

Exercice 6 : Trouver une solution particulière de l'équation $y'' + y' = t$.

Propriété 7 – second membre exponentiel

$(A, r) \in \mathbb{C}$. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{rt}$ possède une solution particulière de la forme suivante, où $B \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} t \mapsto Be^{rt} & \text{si } r \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bte^{rt} & \text{si } r \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ t \mapsto Bt^2e^{rt} & \text{si } r \text{ est racine double du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

En présence de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = A\cos(kt)e^{rt}$ ou $y'' + ay' + by = A\sin(kt)e^{rt}$ avec A, k, r réels, on se ramène à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = Ae^{ikt}e^{rt} = Ae^{(r+ik)t}$ de la propriété précédente, on en trouvera des solutions particulières, et on en prendra les parties réelle ou imaginaire.

Exercice 7 (pour vous entraîner) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sous les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
   Réponse $\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{5}{12}e^{-x}\}$
2. Rechercher les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x\cos(x)$.
   Réponse

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{(2\cos x + 3\sin x)}{13}e^x + (\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))e^{-\frac{x}{2}},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

3.3 problème de Cauchy

Conformément au programme, nous admettons le théorème suivant.

Théorème 1

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une seule solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

4 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 1

Sous réserve que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ appartienne à E, nous avons en effet :

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) \text{ par linéarité de } T \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

Lorsque le second membre se présente sous forme d'une somme de deux termes, on peut se contenter de résoudre deux équations plus simples.

Propriété 2

- Pour c réel, la fonction $f : x \mapsto ce^{-A(x)}$ est dérivable sur I et on a $f'(x) = -cA'(x)e^{-A(x)} = -A'(x)f(x) = -a(x)f(x)$ pour $x \in I$. Donc f est solution de $y' + a(x)y = 0$.
- Réciproquement, soit y une solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$.

On introduit $f(x) = y(x)e^{A(x)}$. f est dérivable sur I et pour $x \in I$,

$$f'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} = 0$$

donc f est constante, et il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = c$, puis $y(x) = ce^{-A(x)}$.

Méthode de la variation des constantes en page 2

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \text{ pour } x \in I \\ &\Leftrightarrow c'(x)e^{-A(x)} - a(x)c(x)e^{-A(x)} + a(x)y(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow c'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue sur I, elle admet des primitives. La fonction c existe, on n'oublie pas de la reporter pour avoir $y_{part}(x) = c(x)e^{-A(x)}$. Il existe donc une solution de (E). Comme on a vu que (H) admettait une infinité de solutions, on en déduit que (E) admet une infinité de solutions.

Propriété 3

Soit A la primitive de a sur I s'annulant en x_0. Nous avons déterminé l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$:

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto ce^{-A(x)},\ c \in \mathbb{K}\}$$

Lors de la méthode de la variation de la constante, nous avons montré qu'une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ était $y_{part}(x) = c(x)e^{-A(x)}$ où c est l'une des primitives sur I de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$, par exemple $c(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$. Donc

$$\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t + ce^{-A(x)},\ c \in \mathbb{K}\}$$

Ainsi, y est solution au problème de Cauchy donné si et seulement si $y_0 = y(x_0) = c$. Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy donné, qui est

$$y : x \mapsto e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t + y_0 \right)$$

Propriété 4

Soit y deux fois dérivable sur I. Introduisons $z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$. On a $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$. Pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{r_1 t}(r_1 z(t) + z'(t)) \\ y''(t) &= e^{r_1 t}(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)) \end{aligned}$$

On a en réaménageant :

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + (r_1^2 + ar_1 + b)z(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) + (0)z(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(t) + (2r_1 + a)z'(t) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (H) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre $f' + (2r_1 + a)f = 0$.
Comme $x^2 + ax + b = (x - r_1)(x - r_2)$, on a $r_1 + r_2 = -a$, et donc $2r_1 + a = 0$ si et seulement si $r_1 = r_2$.

— Si $r_1 \neq r_2$, les solutions de $f' + (2r_1 + a)f = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Donc y est solution de (H) si et seulement si $z'(t) = \lambda e^{-(2r_1+a)t}$ si et seulement si z est de la forme $t \mapsto \alpha e^{-(2r_1+a)t} + \beta$ avec α et β dans $\mathbb{C}$. En multipliant par $e^{r_1 t}$, on obtient y de la forme annoncée.

— Si $r_1 = r_2$, alors $2r_1 + a = 0$ et y est solution de (H) si et seulement si $z'' = 0$ si et seulement si $z' = cte$ si et seulement si z est de la forme $t \mapsto \lambda t + \mu$. En multipliant par $e^{r_1 t}$, on obtient y de la forme annoncée.

Propriété 5

Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe. Plaçons-nous dans le cas où le polynôme caractéristique de (H) admet deux racines complexes non réelles $r - i\omega$ et $r + i\omega$.
Soit y une solution de (H). y pouvant être vue comme une solution complexe, il existe deux complexes α et β tels que

$$y(t) = \alpha e^{(r+i\omega t)} + \beta e^{(r-i\omega)t} \text{ pour } t \in I$$

y est à valeurs réelles et correspond donc à sa partie réelle, qui est

$$(\mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{Re}(\beta))e^{rt}\cos(\omega t) + (\mathrm{Im}(\beta) - \mathrm{Im}(\alpha))e^{rt}\sin(\omega t)$$

qui est bien de la forme annoncée $e^{rt}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right)$.

Réciproquement, par un calcul de dérivées que je vous laisse mener, on vérifie que toute fonction de la forme
$t \mapsto e^{rt}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right)$ est solution de (H).