Intégrales dépendant d'un paramètre

Conformément au programme, les théorèmes de ce chapitre sont admis.

Convergence dominée

1. Théorème de convergence dominée pour $\int_I f_n$.
2. Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Intégration terme à terme

3. Théorème d'intégration terme à terme pour $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t$ avec $f_n \geqslant 0$.
4. Théorème d'intégration terme à terme quand $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$.
5. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

6. Théorème de continuité pour $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
7. Théorème de dérivation et classe $\mathcal{C}^1$ pour $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions de la variable réelle, définie sur un intervalle I non vide et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral

1.1 théorème de convergence dominée

On étudie pour commencer des limites du type $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Dans le cadre d'un segment $I = [a,b]$, nous avons vu :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,b] \\ \text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

- Dans le cadre d'un intervalle quelconque, avec une hypothèse de domination, nous avons vu :

Théorème 1 – théorème de convergence dominée – admis

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux
- il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I f$$

Conformément au programme, pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination mais pas les hypothèses de continuité par morceaux.

Exercice 1 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{1} \dfrac{\ln^2 t}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$.

> Dans le théorème de convergence dominée, l'intervalle d'intégration est fixe. Prolonger la fonction par la fonction nulle permet parfois de contourner cette difficulté.

Exercice 4 : Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Le programme permet d'étendre le théorème de convergence dominée à une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2 – admis

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions indexées par un intervalle J de $\mathbb{R}$, continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Soit λ_0 un point adhérent à J, ou $\lambda_0 = \pm\infty$. On fait les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction f continue par morceaux sur I telle que pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t) = f(t)$
- il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall \lambda \in J,\ \forall t \in I,\ |f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\int\limits_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int\limits_I f$$

Remarques : le plus souvent, $\lambda_0 = \pm\infty$. Par le caractère local de la limite, si $\lambda_0 = +\infty$, il suffit d'établir une domination sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Exercice 5 : Déterminer de plusieurs façons la limite quand x tend vers l'infini de $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(\dfrac{t}{x}\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Méthodes – déterminer la limite d'une suite d'intégrales

Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales, on dispose de plusieurs moyens :

— interversion limite-intégrale dans le cas où il y a convergence uniforme de la suite des intégrandes sur un segment

— théorème de convergence dominée

— de bons encadrements et le théorème des gendarmes

— exprimer différemment l'intégrale (intégration par parties, changement de variable, astuce...)

— raisonner avec des ε en se laissant guider par l'énoncé.

Il ne faut pas croire qu'on peut toujours intervertir limite et intégrale, car c'est faux !

Par récurrence, on peut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$. On constate donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n e^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t = 1 \quad\neq\quad 0 = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{t^n e^{-t}}{n!}\right)\mathrm{d}t$$

1.2 le cas particulier des séries de fonctions

On étudie maintenant des séries de fonctions $\sum f_n$ et on se demande si la somme est intégrable sur I et si on peut permuter les symboles $\sum$ et $\int$:

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cadre d'un segment $I=[a,b]$, nous avons vu :

$$\begin{cases}\text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,b]\\ \text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a,b]\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Cela ne permet pas de répondre à toutes les situations.

Théorème 3 – théorème d'intégration terme à terme – cas positif

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs **positives**, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur I.

Alors, dans $[0,+\infty]$, on a :

$$\int_I\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

En particulier, l'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 4 – théorème d'intégration terme à terme – cas $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et telle que sa somme soit continue par morceaux.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

Conformément au programme, pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Méthodes – intervertir somme et intégrale

Pour intervertir $\sum$ pour une somme de série et $\int_I$, on dispose de plusieurs façons de faire :

— sur un segment, utiliser la convergence uniforme de $\sum f_n$

— intégrer terme à terme pour une série entière sur un segment de l'intervalle ouvert de convergence

— en présence de fonctions f_n positives, pour un résultat lu dans $[0, +\infty]$, on peut intervertir

— si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty$, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme

— sinon, on peut essayer de calculer directement la limite de la suite de sommes partielles (S_n) en jeu (ce qui peut aussi faire intervenir le théorème de convergence dominée).

Il ne faut pas penser que l'interversion est toujours vraie.

Exercice 6 :

1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
2. À l'aide d'un théorème d'intégration, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
4. En calculant de deux façons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) \, \mathrm{d}x$, donner la valeur de

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Exercice 7 (extrait Mines-Ponts 2024) : Soit $x \in]0,1[$. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$$

2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Notation : soit $f : \begin{pmatrix} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{pmatrix}$.

$f(x,.)$ désigne l'application

$f(.,t)$ désigne l'application

2.1 continuité

Théorème 5 – théorème de continuité sous le signe intégral

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé et f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue,
- pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,
- hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

> Comme la continuité est une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur A par la domination sur tout compact de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la domination sur tout segment de A, ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation.

Exercice 8 : On étudie la fonction donnée pour $x \geqslant 0$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 (B.E.O.) : On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

2.2 dérivabilité

Théorème 6 – théorème de dérivabilité sous le signe intégral

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- pour tout $x \in J$, la fonction $f(x,t)$ est intégrable sur I,
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de J,
$$\forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques :
En pratique, si on n'arrive pas à effecter une domination globale, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de J, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

L'hypothèse de domination ne portant que sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, il ne faut pas oublier l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ pour être bien assuré de l'existence de $g(x)$.

Exercice 10 : Montrer que $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1-e^{tx}}{t}\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer sa dérivée.
En déduire $H(x)$ pour $x < 1$.

Théorème 7 – théorème de régularité sous le signe intégral

On peut étendre le théorème précédent à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Exercice 11 : Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.