

# Intégrales dépendant d'un paramètre

Conformément au programme, les théorèmes de ce chapitre sont admis.

## Convergence dominée

1. Théorème de convergence dominée pour  $\int_I f_n$ .
2. Extension au cas d'une famille à paramètre réel  $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## Intégration terme à terme

3. Théorème d'intégration terme à terme pour  $\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$  avec  $f_n \geq 0$ .
4. Théorème d'intégration terme à terme quand  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$ .
5. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

## Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

6. Théorème de continuité pour  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ .
7. Théorème de dérivation et classe  $\mathcal{C}^1$  pour  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ . Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$ .

---

Dans ce chapitre, on considère des fonctions de la variable réelle, définie sur un intervalle  $I$  non vide et à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral

### 1.1 théorème de convergence dominée

On étudie pour commencer des limites du type  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt$ . Dans le cadre d'un segment  $I = [a, b]$ , nous avons vu :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a, b] \\ \text{la suite } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a, b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

Cela ne permet pas de répondre à toutes les situations.

#### Théorème 1 – théorème de convergence dominée – admis

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur  $I$  et on a :

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f.$$

Conformément au programme, pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination mais pas les hypothèses de continuité par morceaux.

Exercice 1 : Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2 \sin(t/n)}{1 + t^2} dt$ .

Exercice 2 : Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$ .

Exercice 3 : Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt = 1 - \frac{1}{e}$ .

Dans le théorème de convergence dominée, l'intervalle d'intégration est fixe. Prolonger la fonction par la fonction nulle permet parfois de contourner cette difficulté.

Exercice 4 : Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Le programme permet d'étendre le théorème de convergence dominée à une famille à paramètre réel  $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . C'est l'objet du théorème suivant.

#### Théorème 2 – admis

Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$  une famille de fonctions indexées par un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , continues par morceaux de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $\lambda_0$  un point adhérent à  $J$ , ou  $\lambda_0 = \pm\infty$ . On fait les hypothèses suivantes :

- il existe une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  telle que pour tout  $t \in I$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(t) = f(t)$
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant

$$\forall \lambda \in J, \forall t \in I, |f_\lambda(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur  $I$  et on a :

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f$$

Remarques : le plus souvent,  $\lambda_0 = \pm\infty$ . Par le caractère local de la limite, si  $\lambda_0 = +\infty$ , il suffit d'établir une domination sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ .

Exercice 5 : Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} dt$  de deux façons :

1. par le théorème de convergence dominée,
2. par encadrement et théorème des gendarmes.

## Méthodes – déterminer la limite d'une suite d'intégrales

Pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales, on dispose de plusieurs moyens :

- interversion limite-intégrale dans le cas où il y a convergence uniforme de la suite des intégrandes sur un segment
- théorème de convergence dominée
- de bons encadrements et le théorème des gendarmes
- exprimer différemment l'intégrale (intégration par parties, changement de variable, astuce...)
- raisonner avec des  $\varepsilon$  en se laissant guider par l'énoncé.

Il ne faut pas croire qu'on peut toujours intervertir limite et intégrale, car c'est faux !



Par récurrence, on peut montrer que  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ . On constate donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} \right) dt$$

## 1.2 le cas particulier des séries de fonctions

On étudie maintenant des séries de fonctions  $\sum f_n$  et on se demande si la somme est intégrable sur  $I$  et si on peut permuter les symboles  $\sum$  et  $\int$  :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

Dans le cadre d'un segment  $I = [a, b]$ , nous avons vu :

$$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a, b] \\ \text{la série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

Cela ne permet pas de répondre à toutes les situations.

### Théorème 3 – théorème d'intégration terme à terme – cas positif

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , à valeurs **positives**, telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur  $I$ .

Alors, dans  $[0, +\infty]$ , on a :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

En particulier, l'intégrabilité de  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  sur  $I$  équivaut à  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty$ .

Théorème 4 – théorème d'intégration terme à terme – cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$

Soit  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur  $I$ .

Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt < +\infty$ , alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

Conformément au programme, pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Exercice 6 : À l'aide des théorèmes précédents,

1. montrer que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ,

2. montrer que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

Méthodes – intervertir somme et intégrale

Pour intervertir  $\sum$  pour une somme de série et  $\int_I$ , on dispose de plusieurs façons de faire :

- sur un segment, utiliser la convergence uniforme de  $\sum f_n$
- intégrer terme à terme pour une série entière sur un segment de l'intervalle ouvert de convergence
- en présence de fonctions  $f_n$  positives, pour un résultat lu dans  $[0, +\infty]$ , on peut intervertir
- si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| dt < +\infty$ , on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme
- sinon, on peut essayer le théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles  $(S_n)$  de la série  $\sum f_k$  de somme  $S$  (voir exercice suivant).

Il ne faut pas penser que l'interversion est toujours vraie.

Exercice 7 :

1. On souhaite montrer que  $\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^2)^k dt$ .

(a) Montrer que le théorème d'intégration terme à terme de ce chapitre ne s'applique pas.

(b) On revient à la suite  $(S_n)$  des sommes partielles :  $S_n = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k$ . Montrer que le théorème de convergence dominée s'applique pour  $(S_n)$  et conclure.

2. Mêmes questions pour  $\int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{t^{3k+3}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^k}{t^{3k+3}} dt$ .

## 2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

**Notation :** soit  $f : \begin{pmatrix} A \times I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{pmatrix}$ .

$f(x, \cdot)$  désigne l'application

$f(\cdot, t)$  désigne l'application

### 2.1 continuité

#### Théorème 5 – théorème de continuité sous le signe intégral

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(\cdot, t)$  est continue,
- pour tout  $x \in A$ ,  $f(x, \cdot)$  est continue par morceaux,
- hypothèse de domination : il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

Comme la continuité est une notion locale, on peut remplacer la condition de domination sur  $A$  par la domination sur tout compact de  $A$ . Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , il suffit de montrer la domination sur tout segment de  $A$ , ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation.

Exercice 8 : Montrer que  $h : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice 9 : Montrer que  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

Exercice 10 : Montrer que  $B : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  est continue sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

### 2.2 dérivabilité

Commençons par vérifier que vous savez encore calculer des dérivées partielles. On considère  $\psi(t, s) = \frac{t}{t+s}$ .  
Calculer :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) =$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(t, s) =$$

**Théorème 6 – théorème de dérivabilité sous le signe intégral**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(\cdot, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ ,
- pour tout  $x \in J$ ,  $f(x, \cdot)$  est intégrable sur  $I$ ,
- pour tout  $x \in J$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- hypothèse de domination : il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  telle que, pour tout  $x$  de  $J$ ,

$$\forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarques :

En pratique, si on n'arrive pas à effectuer une domination globale, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $J$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

L'hypothèse de domination ne portant que sur  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , il ne faut pas oublier l'intégrabilité de  $t \mapsto f(x, t)$  pour être bien assuré de l'existence de  $g(x)$ .

Exercice 11 : Montrer que  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

**Théorème 7 – théorème de régularité sous le signe intégral**

On peut étendre le théorème précédent à la classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right|$  et d'intégrabilité des  $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$  pour  $0 \leq j \leq k - 1$ .

Exercice 12 : Montrer que  $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .