Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

1. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.
2. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.
3. Matrice de l'adjoint en base orthonormée.
4. Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Matrices orthogonales

5. Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.
6. Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
7. Groupe orthogonal.
8. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.
9. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

10. Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.
11. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.
12. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$.
13. Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.
14. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$.

Isométries vectorielles en dimension 2

15. Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.
16. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.
17. Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau. Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
18. Classification des isométries d'un plan euclidien.

Réduction des isométries

19. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
20. Réduction d'une isométrie en base orthonormée.
21. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

22. Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.
23. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
24. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.
25. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.
26. Théorème spectral.
27. Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

28. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$.
29. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Dans tout le chapitre E désigne un espace euclidien, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

1 Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Pour tout vecteur de E, on a la décomposition dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Donc les coordonnées de $u(e_j)$ relativement aux e_i valent $\langle u(e_j), e_i \rangle$.

$$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \quad u(e_1) \quad & \quad u(e_2) \quad & \quad\quad & \quad u(e_n) \quad \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \langle u(e_1), e_1 \rangle & \langle u(e_2), e_1 \rangle & & \langle u(e_n), e_1 \rangle \\ \langle u(e_1), e_2 \rangle & \langle u(e_2), e_2 \rangle & & \langle u(e_n), e_2 \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle u(e_1), e_n \rangle & \langle u(e_2), e_n \rangle & & \langle u(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{array} \end{array} = M$$

Calculons $M^\top M$:

2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1 – représentation des formes linéaires

Pour toute forme linéaire φ, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

Définition - propriété 1

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Cet endomorphisme u^* s'appelle *l'adjoint* de u.

Par exemple, $\mathrm{Id}^* =$

Propriété 1 – propriétés de $u \mapsto u^*$

Linéarité : l'application $u \mapsto u^*$ est linéaire.

Involution : l'application $u \mapsto u^*$ est involutive, c'est-à-dire que $(u^*)^* = u$.

Composition : $(u \circ w)^* = w^* \circ u^*$.

Inversibilité : si u est bijective, u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Exercice 1 : Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et que $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$.

Propriété 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On a $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(u^*) = \mathrm{mat}_\mathcal{B}(u)^\top$.

> Il s'ensuit que les endomorphismes u et u^* ont même rang, même déterminant, même trace et même polynôme caractéristique.

Propriété 3

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

3 Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

Définition 1

On appelle *projecteur orthogonal* de E tout projecteur sur un sous-espace vectoriel F et parallèlement à $F^\perp$.
On appelle *symétrie orthogonale* de E toute symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$.
On appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Exercice 2 : Soient H un hyperplan de E de vecteur normal $\vec{n}$ et s la réflexion par rapport à H. Donner l'expression de $s(x)$ pour $x \in E$.

Propriété 4

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$).

$$p \text{ est un projecteur orthogonal } \Leftrightarrow p^* = p$$

Exercice 3 : Montrer qu'une symétrie de E est une symétrie orthogonale si, et seulement si, $s^* = s$.

4 Matrices orthogonales

4.1 caractérisation des matrices orthogonales

Définition 2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $A^\top A = I_n = AA^\top$.

Autrement dit, A est une matrice orthogonale si A est inversible, d'inverse égal à sa transposée. Comme d'habitude, il suffit d'avoir $A^\top A = I_n$ ou $AA^\top = I_n$ pour avoir $A^\top A = I_n = AA^\top$.
I_n est une matrice orthogonale.

Soit une matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ entre deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E.

$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad =$

$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \quad =$

$$\boxed{P^\top P = I_n = PP^\top}$$

Exercice 4 : Soit A une matrice orthogonale. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

Propriété 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est une matrice orthogonale
2. la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des colonnes de A est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
3. la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ des lignes de A est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Définition - propriété 2

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont *orthogonalement semblables* s'il existe une matrice orthogonale P telle que

$$B = P^{-1}AP = P^\top AP$$

A et B représentent alors le même endomorphisme dans deux bases orthonormales.

4.2 groupe orthogonal

Si A est une matrice orthogonale, $\det(A^\top A) = \det(I_n)$, donc $(\det(A))^2 = \det(A^\top)\det(A) = 1$ et donc $\det(A) = \pm 1$. Ceci nous amène à distinguer deux types de matrices orthogonales.

Définition - propriété 3

- L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe orthogonal* et noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.
- Une matrice orthogonale A est dite *positive*, ou *directe*, si $\det A = 1$.
  L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.
- Une matrice orthogonale A est dite *négative*, ou *indirecte*, si $\det A = -1$.
  L'ensemble des matrices orthogonales négatives n'est pas un groupe.

Exercice 5 : Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des compacts.

4.3 orientation d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a vu que P était une matrice orthogonale, donc son déterminant est égal à 1 ou à -1.
On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ *définissent la même orientation* si $\det(P) = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E. Toutes les bases qui définissent la même orientation sont dites directes. Les autres sont dites indirectes.
Orienter l'espace revient donc à choisir une des deux classes d'équivalence associées à la relation d'équivalence définie par « $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}'$ si et seulement si $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = 1$ ».

— Par convention, les bases orthonormales directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle de la main droite.

— En pratique, dans $\mathbb{R}^n$, on choisit toujours la base canonique comme base directe de référence.

— Pour E espace euclidien orienté et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases orthonormées directes de E, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$. Cela vient de la formule de changement de base pour les déterminants :

5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Dans d'anciens sujets de concours, vous pouvez rencontrer la terminologie *automorphisme orthogonal* à la place de *isométrie vectorielle*.

Définition - propriété 4

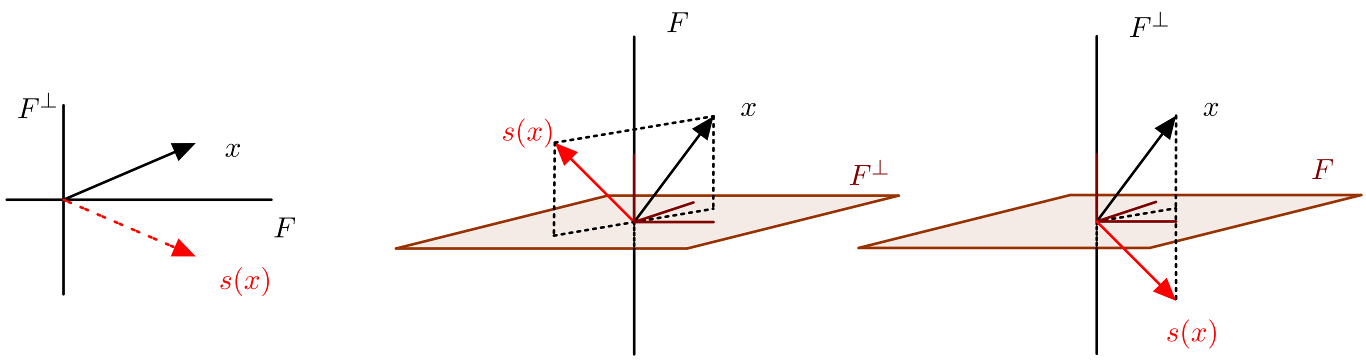
Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u conserve la norme : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
2. u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. u conserve les bases orthonormées : pour $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

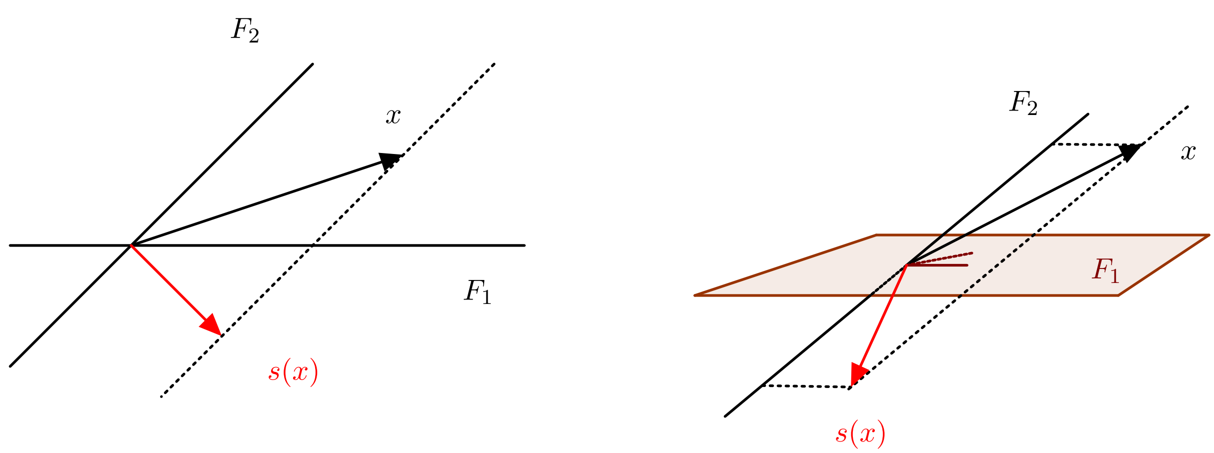
On dit alors que u est une *isométrie vectorielle* de E.

Exercice 6 : Montrer qu'une symétrie est une isométrie vectorielle si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

Trois schémas de symétries orthogonales – isométries



Deux symétries non orthogonales – pas des isométries



Propriété 6

L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé *groupe orthogonal* de E et noté $\mathrm{O}(E)$.

Propriété 7

Soit u un endomorphisme de E.

$$u \text{ est une isométrie vectorielle } \Leftrightarrow \begin{cases} u & \text{est bijectif} \\ u^{-1} & = u^* \end{cases}$$

Propriété 8

Un endomorphisme est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Il s'ensuit que le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou -1.

Définition - propriété 5

- Une isométrie u est dite *positive*, ou *directe*, si son déterminant vaut 1.
  L'ensemble des isométries positives est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(E)$.
- Une isométrie u est dite *négative*, ou *indirecte*, si son déterminant vaut -1. L'ensemble des isométries négatives n'est pas un groupe.

Remarques :

— Pour $\mathcal{B}$ base orthonormée de E, on a les équivalences suivantes :

$$u \in \mathrm{SO}(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in \mathrm{O}(E) \\ \det u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ \det \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

— Par formule sur les déterminants,

$$\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

donc u transforme une base orthonormale directe de E en base orthonormale directe si, et seulement si, $u \in \mathrm{SO}(E)$.

Exercice 7 : Caractérisation des symétries orthogonales.

1. Montrer qu'une symétrie est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.
2. Nous reprenons les schémas en page 6 pour voir, dans chaque cas de symétrie orthogonale, si s est une isométrie positive ou négative, en mettant en parallèle le calcul de $\det(s)$.

6 Isométries vectorielles en dimension 2

Propriété 9

$O_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Plus précisément,

$$\begin{aligned} M \in SO_2(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = R(\theta) \\ M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = S(\theta) \end{aligned}$$

Propriété 10

Pour θ, θ' réels, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et isomorphe à $\mathbb{U}$.

Propriété 11

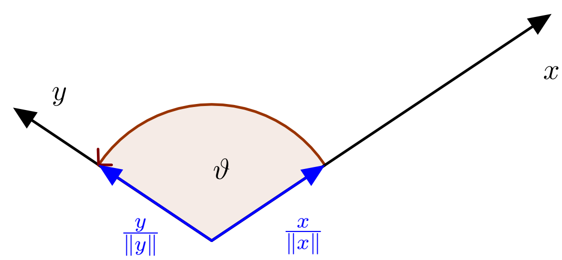
Ici E est un espace euclidien orienté de dimension 2. Soit $u \in O(E)$.

- Si $u \in SO(E)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$, on ait $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$. On dit que u est une *rotation d'angle* θ.
- Si $u \in O(E) \setminus SO(E)$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et u est une réflexion.

Nous somme en mesure de remplir le tableau récapitulatif des isométries vectorielles du plan en annexe.

Terminons par une définition. Soient des vecteurs non nuls x et y du plan orienté E.
Il existe une unique rotation u telle que $u(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{y}{\|y\|}$.

L'angle θ de cette rotation est appelé *angle orienté* de x et y.



7 Réduction des isométries

7.1 cas général

Énonçons trois lemmes qui seront utiles pour le « gros » théorème de réduction :

Lemme 1

Pour $u \in \mathrm{O}(E)$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Lemme 2

Si F est stable par l'isométrie vectorielle u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

Lemme 3

Tout endomorphisme (pas nécessairement une isométrie) d'un espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.

Théorème 2

Soit une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme (1), (-1) et $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Autrement dit, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & (0) & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r$$

Corollaire 1

Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme (1), (-1) et $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, telles que $A = PDP^{\top}$.

7.2 réduction des isométries positives en dimension 3

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Par le théorème de réduction, quand on enlève les redondances, la matrice de u isométrie de E est, dans une certaine base orthonormée, de la forme $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Et toute matrice de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. On précise le cas d'une isométrie positive.

Propriété 12

Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que u est une rotation d'angle θ.

Il existe une droite D et un plan $P = D^{\perp}$ tel que $u_D = \mathrm{Id}_D$ et u_P soit une rotation.

Remarques :

— L'angle de la rotation peut être déterminé, au signe près, par $\mathrm{Tr}(u) = 1 + \mathrm{Tr}(R(\theta)) = 1 + 2\cos\theta$.

— Si u est une isométrie négative d'un espace de dimension 3, $-u$ est une isométrie positive.

— Conformément au programme, la pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{S0}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme. Terminons tout de même par un exemple.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminons les caractéristiques de u.

- u est une isométrie car :

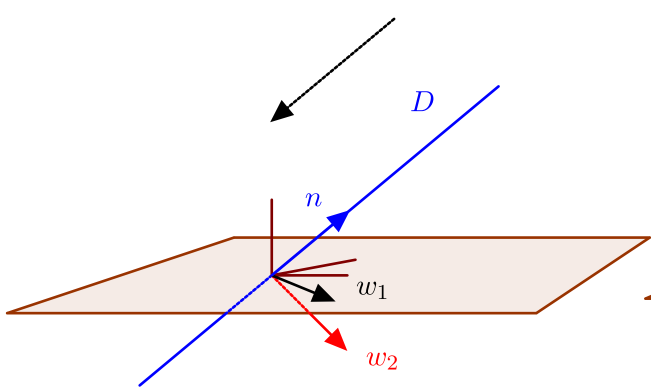
- u est une isométrie positive car :

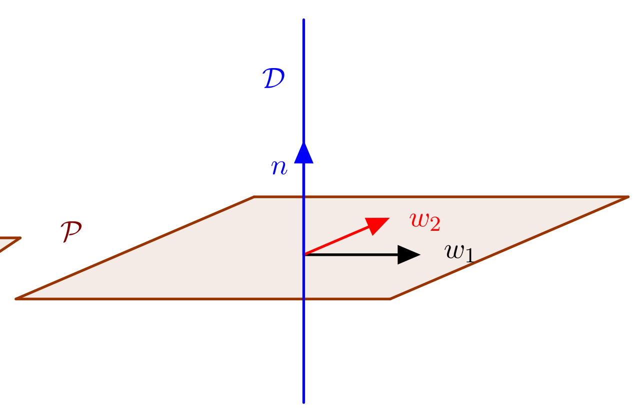
- L'ensemble des invariants de u est $D = \mathrm{Vect}(n)$, où $n =$

- Pour $P = D^\perp = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, u_P est par propriété une rotation. Son angle θ vérifie :

  Je prends $w_1 = (1, -1, 0)$, $w_2 = (1, 0, -1)$ et j'oriente D dans le sens de n. $AW_2 =$.
  À l'aide des schémas ci-dessous, $\theta =$

Prenons l'angle de vue donné par la flèche





8 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

8.1 généralités

Définition 3

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est *autoadjoint* si $u^* = u$, c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Par exemple, Id et plus généralement $\alpha\,\mathrm{Id}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), sont autoadjoints.

Propriété 13

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$u \in \mathcal{S}(E) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$$

Un endomorphisme autoadjoint est parfois appelé endomorphisme symétrique, en vertu de la propriété précédente, et cela explique la notation $\mathcal{S}(E)$.

Propriété 14

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, et $\dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 15

Soit p un projecteur de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. p est un projecteur orthogonal.
2. p est un endomorphisme autoadjoint.
3. $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est une matrice symétrique.

8.2 réduction des endomorphismes autoadjoints

Rappelons que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. Dans le cas d'un endomorphisme autoadjoint, nous avons donc :

Propriété 16

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Propriété 17

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 3 – Théorème spectral

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale. Plus précisément, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est autoadjoint.
2. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.
3. $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$

Corollaire 2

Toute matrice symétrique **réelle** A est orthogonalement diagonalisable : il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^\top$$

Exercice 8 : Le résultat précédent ne s'étend pas dans $\mathbb{C}$. Montrer en effet que la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 : Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^\top M$ est diagonalisable.

Exercice 10 : Diagonaliser orthogonalement $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 : Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, et $f : x \mapsto \langle u(x), x\rangle$. En utilisant le théorème spectral, montrer que le minimum de f sur $S = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ est égal à la plus petite valeur propre de u, et que le maximum de f sur S est égal à la plus grande valeur propre de u.

8.3 endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition 4

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- On dit que u est autoadjoint *positif* si : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$.
- On dit que u est autoadjoint *défini positif* si : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$, ou de manière équivalente :
$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Propriété 18 – Caractérisation spectrale

Soit u un automorphisme autoadjoint.

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+ \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

Définition - propriété 6

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice :

- *symétrique positive* si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX = \langle AX, X\rangle \geqslant 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$$

- *symétrique définie positive* si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top AX = \langle AX, X\rangle > 0 \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

✎ Exercice 12 : Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre n. Montrer que (1) $\Leftrightarrow$ (2), où :

1. $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
2. il existe une matrice L inversible et symétrique telle que $M = L^2$.

9 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Théorème 1 (théorème de représentation de Riesz)

Démonstration 1

Comme E est un espace euclidien, il possède une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $a \in E$. La forme linéaire $x \mapsto \langle x, a\rangle$ est égale à φ si, et seulement si, elle coïncide avec φ sur une base de E, soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \varphi(e_i) = \langle e_i, a\rangle$$

Or par l'écriture d'un vecteur dans une base orthonormée, $a = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, a\rangle e_i$.

Donc le vecteur a est solution du problème si et seulement si $a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i$.

Démonstration 2

Montrons que l'application $f : \begin{pmatrix} E & \to & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & (x \mapsto \langle x, a\rangle) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

- f est linéaire.
- $\dim E = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$
- f est injective : soit $a \in \ker f$. On a $a \in E^{\perp} = \{0\}$.

Donc f est bijective.

Définition-propriété 1

• Existence et unicité

Soit $y \in E$. L'application $x \mapsto \langle u(x), y\rangle$ est une forme linéaire. D'après le théorème de représentation, il existe un unique vecteur dépendant de y donc qu'on peut noter $a(y)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle a(y), x\rangle$$

On pose alors $u^*(y) = a(y)$. Pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle u^*(y), x\rangle$.

• Linéarité

Il ne reste qu'à vérifier la linéarité de u^*. Soient $y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On va vérifier que $u^*(\lambda y + z) - (\lambda u^*(y) + u^*(z))$ est dans $E^{\perp} = \{0\}$. Par bilinéarité du produit scalaire, pour $x \in E$,

$$\begin{array}{rcl} \langle u^*(\lambda y + z)|x\rangle & = & \langle \lambda y + z|u(x)\rangle \\ & = & \lambda\langle y|u(x)\rangle + \langle z|u(x)\rangle = \lambda\langle u^*(y)|x\rangle + \langle u^*(z)|x\rangle \\ & = & \langle \lambda u^*(y) + u^*(z)|x\rangle \end{array}$$

$u^*(\lambda y + z) - (\lambda u^*(y) + u^*(z))$ est orthogonal à tout vecteur, donc est nul.

Propriété 1

Linéarité :

$$\begin{array}{rcl} \langle(\lambda u + w)^*(y), x\rangle & = & \langle y, \lambda u(x) + w(x)\rangle = \lambda\langle y, u(x)\rangle + \langle y, w(x)\rangle \\ & = & \lambda\langle u^*(y), x\rangle + \langle w^*(y), x\rangle \\ & = & \langle \lambda u^*(y) + w^*(y), x\rangle \end{array}$$

Par unicité de l'adjoint, $(\lambda u + w)^*(y) = \lambda u^*(y) + w^*(y)$.

Involution : Pour montrer que $(u^*)^* = u$, on montre que u satisfait, à la place de g, à la relation :

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

Ici, $\langle x, g(y)\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle u(y), x\rangle = \langle y, u^*(x)\rangle$.
Dit autrement, puisque $\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, l'adjoint de u^* est bien u par unicité de l'adjoint.

Composition : Facile.

$$\langle u \circ w(x), y\rangle = \langle w(x), u^*(y)\rangle = \langle x, w^*(u^*(y))\rangle$$

Inversibilité : On part de $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}$. On a donc $(u \circ u^{-1})^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$. Par la propriété de composition, $(u^{-1})^* \circ u^* = \mathrm{Id}$. Comme E est de dimension finie, l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite, donc u^* est bijective, et on a trouvé son inverse.

Propriété 2

On a vu en introduction, puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, que les coefficients de la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ étaient

$$m_{i,j} = \langle u^*(e_j)|e_i\rangle = \langle e_j|u(e_i)\rangle = \langle u(e_i)|e_j\rangle = [\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)]_{j,i}$$

Propriété 3

Soit F stable par u et soit $x \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$.
$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$

Propriété 4

Soit p un projecteur de E espace vectoriel euclidien.

- Supposons que p soit un projecteur orthogonal. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\langle p(x)|y\rangle &= \langle p(x)|p(y) + y - p(y)\rangle \\ &= \langle p(x)|p(y)\rangle + \langle p(x)|y - p(y)\rangle \\ &= \langle p(x)|p(y)\rangle + 0 \quad \text{car } p(x) \in F \text{ et } y - p(y) \in F^{\perp} \\ &= \langle p(x)|p(y)\rangle\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de x et y, on a aussi : $\langle p(y)|x\rangle = \langle p(y)|p(x)\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle$.
Et par symétrie du produit scalaire : $\langle x|p(y)\rangle = \langle p(x)|p(y)\rangle$, et finalement, $\langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$.

- Supposons que $p^* = p$ (on dit que p est autoadjoint).

p est un projecteur ; c'est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$. On voudrait donc montrer que $\ker p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$.
Soient $x \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. Il existe $t \in E$ tel que $y = p(t)$. On a :

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \langle x|p(t)\rangle \\ &= \langle p(x)|t\rangle \quad \text{car } p^* = p \\ &= \langle 0|t\rangle = 0\end{aligned}$$

Ainsi $\ker p \subset (\operatorname{Im} p)^{\perp}$. Par le théorème du rang et propriété de l'orthogonal, nous avons :

$$\dim \ker p = \dim E - \dim \operatorname{Im} p = \dim (\operatorname{Im} p)^{\perp}$$

et finalement, $\ker p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$. p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $(\operatorname{Im} p)^{\perp}$.

Propriété 5

$\langle C_i, C_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = [A^{\top} A]_{i,j}$.
Donc A est une matrice orthogonale si et seulement si $\langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j}$ si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille orthonormée.
Par ailleurs, une famille orthonormée est libre. Donc une famille orthonormée à $\dim E$ vecteurs est une base de E.
Donc A est une matrice orthogonale si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Même type de raisonnement avec les lignes (on peut aussi raisonner sur la transposée de A).

Définition-propriété 3

- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On montre que $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\left(AB^{-1}\right)^{\top} AB^{-1} &= \left(AB^{\top}\right)^{\top} AB^{\top} = BA^{\top} AB^{\top} \\ &= BB^{\top} = I_n\end{aligned}$$

- On complète ce qui précède avec $\det(I_n) = 1$ et $\det(\left(AB^{-1}\right)^{\top}) = \det(AB^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det B} = \frac{1}{1} = 1$.

- Le produit de deux matrices de déterminant -1 est de déterminant 1.

Définition-propriété 4

- (1) $\Rightarrow$ (2)

On suppose que u conserve la norme. Par formule de polarisation :

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (1) (facultatif)

On suppose que u conserve le produit scalaire. Alors $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et par positivité de la norme, $\|u(x)\| = \|x\|$.

- (2) $\Rightarrow$ (3)

Supposons que u conserve le produit scalaire. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
$\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$. Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de E. On termine comme d'habitude pour *base*.

- (3) $\Rightarrow$ (1)

Supposons que u conserve les bases orthonormées de E.
Soit $x \in E$. Si $x = 0$, $\|u(x)\| = \|u(0)\| = 0 = \|0\| = \|x\|$.
Si $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, et peut être complété en $\mathcal{B}$ base orthonormée de E.
Par hypothèse, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée, donc en particulier, $u(\frac{x}{\|x\|})$ est de norme 1.
Donc $\|\frac{1}{\|x\|} u(x)\| = 1$ puis $\|u(x)\| = \|x\|$.

Propriété 6

- Montrons que $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.

Soit u une isométrie vectorielle et $x \in \ker u$. On a $\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$. Donc $x = 0$. u est donc injectif. S'agissant d'un endomorphisme de E de dimension finie, u est bijectif.

- Id_E conserve la norme, $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$.
- Soient u et w dans $\mathrm{O}(E)$. Montrons que $u \circ w^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. Soit $x \in E$.

$$\|u(w^{-1}(x))\| \underset{u \text{ isométrie}}{=} \|w^{-1}(x)\| \underset{w \text{ isométrie}}{=} \|w(w^{-1}(x))\| = \|x\|$$

Propriété 7

- On suppose que u est une isométrie. On a vu à la propriété 6 que u était bijectif. Pour x et y dans E,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u \circ u^{-1}(y)\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$$

donc $u^* = u^{-1}$.

- On suppose que u est bijectif et que $u^* = u^{-1}$.

$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle = \langle x, x\rangle$

Propriété 8

On note M la matrice de u dans une base orthonormée.
Par la propriété précédente, u est une isométrie si, et seulement si, $u \circ u^* = \mathrm{Id}$ si, et seulement si, $MM^\top = I_n$ si, et seulement si, M est une matrice orthogonale.

Propriété 9

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale. On a les équations $\begin{cases} a^2 + c^2 & = 1 \\ b^2 + d^2 & = 1 \\ ab + cd & = 0 \ (*) \\ ad - bc & = \pm 1 \end{cases}$. On procède par astuce avec $(*)$, en essayant de fournir une colinéarité sur un vecteur non nul :

$$\text{Par } (*), \ \begin{vmatrix} a & -d \\ c & b \end{vmatrix} = 0, \text{ avec } (a, c) \neq 0 \text{ puisque sa norme est 1}$$

Il existe un réel α tel que $\underbrace{\begin{pmatrix} -d \\ b \end{pmatrix}}_{\text{de norme 1}} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}}_{\text{de norme 1}}$. Donc $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Premier cas : $\alpha = 1$. $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $\det(M) = -(a^2 + c^2) = -1$.
La relation $a^2 + c^2 = 1$ fournit $a^2 \leqslant 1$, puis $-1 \leqslant a \leqslant 1$, et l'existence de θ réel tel que $a = \cos\theta$. On en déduit que $c = \pm\sin\theta$. Mais quitte à changer θ en $-\theta$, il existe θ réel tel que $c = \sin\theta$.
M est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S(\theta)$.

Deuxième cas : $\alpha = -1$. $M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ et $\det(M) = a^2 + c^2 = 1$. Par les mêmes calculs/raisonnements qu'au premier cas, $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$. M est de la forme $R(\theta)$.

Propriété 10
Ce sont les formules trigonométriques et le calcul matriciel $R(\theta)R(\theta')$ qui donnent la matrice $R(\theta+\theta')$. Soit

$$\psi : \left(\begin{array}{ccc} (\mathbb{U},\times) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ z=e^{i\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

- ψ est bien définie.
- ψ est un morphisme de groupes :

$$\psi(zz') = \psi(e^{i(\theta+\theta')}) = R(\theta+\theta') = R(\theta)R(\theta') = \psi(z)\psi(z')$$

- ψ est surjective par la propriété précédente (prop. 10).
- $\psi(z) = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta & = 1 \\ \sin\theta & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = 1$. Donc ψ est injective.

Propriété 11
- Soit u une isométrie positive.

Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée directe de E. La matrice de u dans cette base est orthogonale positive, donc il existe θ (unique modulo 2π) tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = R(\theta)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$. En tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées, P est une matrice orthogonale. Comme on passe d'une base directe à une base directe, $\det(P) = 1$, et $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Par formule de changement de bases, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times R(\theta) \times P^{-1}$.
On a vu dans la propriété précédente (propriété 10) que $\mathrm{S0}_2(\mathbb{R})$ était un groupe commutatif. Donc ces trois matrices commutent, donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$.
Remarque : dans une base orthonormée indirecte, on peut montrer que $\mathrm{mat}(u) = R(-\theta)$.

- Soit u une isométrie négative. Par la propriété 9, il existe une base orthonormale de E dans laquelle $\mathrm{mat}(u) = S(\theta)$. Comme $[S(\theta)]^2 = I_2$, on a $\chi_u = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ et χ_u est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable, de spectre $\{-1, 1\}$.

Pour $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$, on a

$$\langle x, y\rangle = \langle u(x), -u(y)\rangle = -\langle x, y\rangle \text{ puis } \langle x, y\rangle = 0$$

Les espaces propres sont donc orthogonaux, et on peut considérer une base orthonormée (x_0, y_0) de $E_1 \oplus E_{-1} = E$; dans cette base orthonormée, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Et u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(x_0)$. C'est une réflexion car $\dim \mathrm{Vect}(x_0) = \dim E - 1$.

Lemme 1
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme u conserve la norme, $\|\lambda x\| = \|x\|$, puis $|\lambda|\|x\| = \|x\|$. Comme $x \neq 0$, $\|x\| \neq 0$, et $|\lambda| = 1$.
u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel... $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Lemme 2
Soit F stable par l'isométrie vectorielle u. On a $u(F) \subset F$.
Avoir l'œil ! $u(F)$ et F sont de même dimension car u est bijectif. Donc $u(F) = F$. Cela va servir !
Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Par ce qui précède, il existe $t \in F$ tel que $y = u(t)$.
$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(t)\rangle = \langle x, t\rangle = 0$.
$F^\perp$ est aussi stable par u.

Lemme 3
Soit u un endomorphisme de E et π_u son polynôme minimal.
Premier cas : si π_u admet une racine dans $\mathbb{R}$, alors u admet une valeur propre, et un vecteur propre associé e. $\mathrm{Vect}(e)$ est une droite stable par u.

Deuxième cas : π_u n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$. On peut l'écrire $\pi_u = P_1 \times \cdots \times P_r$ produit de polynômes de degré 2 sans racines réelles.

$$0 = \pi_u(u) = P_1(u) \circ \cdots \circ P_r(u)$$

Par définition du polynôme minimal, $P_1(u)$ n'est pas bijectif et n'est pas injectif. Notons $P_1 = X^2 + aX + b$. Il existe $e \neq 0$ tel que $P_1(u)(x) = 0$. On a $u^2(e) \in \mathrm{Vect}(e, u(e))$, ce qui permet d'avoir $\mathrm{Vect}(e, u(e))$ stable par u.
Remarque : il s'agit d'un plan, puisque $e \neq 0$ et qu'on a supposé que u n'avait pas de valeur propre.

Théorème 2
Soit $\mathcal{P}_n$: « pour toute isométrie d'un espace euclidien E de dimension n, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la

matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme (1), (-1), $R(\theta)$ avec $\theta \notin \{0, \pi\}$ ».
On montre cette propriété par récurrence forte pour $n \geqslant 1$.
• $\mathcal{P}_1$ est vraie. Tout vecteur non nul est vecteur propre, et par le lemme 1, les valeurs propres possibles sont 1 et -1.
$\mathcal{P}_2$ est vraie (cf. réduction des isométries en dimension 2).
• Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ sont vraies, et soit u isométrie d'un espace euclidien E de dimension $n+1$.
Par le lemme 3, il existe une droite ou un plan stable par u.

— S'il existe une droite $D = \mathrm{Vect}(e)$ stable par u, alors d'une part, e est vecteur propre de u associé, par le lemme 1, à la valeur propre 1 ou -1. D'autre part, par le lemme 2, $D^\perp$ est stable par u. $u_{D^\perp}$ est encore une isométrie (la propriété de conservation de la norme reste vraie par restriction), en dimension n. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $D^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{D^\perp}$ est diagonale par blocs avec des blocs comme annoncé.
Soit $\mathcal{B}'$ la concaténation de (e) et $\mathcal{B}$. C'est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

— Sinon, il existe P plan stable par u.
u_P est une isométrie en dimension 2, et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ dans laquelle $\mathrm{mat}(u_P)$ est de la forme $R(\theta)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(Remarque : c'est forcément $R(\theta)$ puisqu'on s'est ici placé dans le cas où u n'admettait pas de droite stable.)
Et par le lemme 2, $P^\perp$ est stable par u. $u_{P^\perp}$ est encore une isométrie, en dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $P^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{P^\perp}$ est diagonale par blocs avec des blocs comme annoncé.
Soit $\mathcal{B}'$ la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. C'est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme voulue.

Pour moi : classification des isométries en dimension 3, en fonction des éléments propres

isométrie	déterminant	spectre	matrice dans une certaine base orthonormée
identité (rotation d'angle 0)	1	$\{1\}$	I_2
rotation d'angle π (demi-tour)	1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle $\theta \notin \{0, \pi\}$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}$	-1	$\{-1\}$	$-I_2$
réflexion	-1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
composée rotation-réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Propriété 13

On commence par montrer le lemme :

Lemme 4

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$$u^* = u \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i \rangle u(e_j) \rangle$$

Puis on prend $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a vu en introduction du chapitre :

$$m_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

Par le lemme, $u \in \mathcal{S}(E) \iff \forall i, j,\ m_{i,j} = m_{j,i} \iff M \in S_n(\mathbb{R})$.

Propriété 14

- $\mathrm{Id} \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(E) \subset \mathscr{L}(E)$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{S}(E)$. On a vu que $u \mapsto u^*$ est linéaire.
Donc $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^* = \lambda u + v$.
$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
Remarque : $(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u$ n'est égal à $u \circ v$ que si u et v commutent.

- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. L'application $f : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(E) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

Donc $\dim \mathcal{S}(E) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 15

(1) $\Leftrightarrow$ (2) a été démontrée en propriété 4.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) vient d'être montrée en propriété 13.

Propriété 17

Soient E_α et E_β deux espaces propres de $u \in \mathcal{S}(E)$ avec $\alpha \neq \beta$. Soient $x \in E_\alpha$ et $y \in E_\beta$. On a $u(x) = \alpha x$ et $u(y) = \beta y$.
$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ donc $\alpha\langle x, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle$. Puis $\langle x, y\rangle = 0$.
$E_\alpha \perp E_\beta$

Théorème 3

Lemme 5

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien non nul admet au moins une valeur propre.

Démonstration : soit $u \in \mathcal{S}(E)$ avec $\dim E \geqslant 1$.
Si $\dim E = 1$: il existe $e \neq 0$ dans E. $E = \mathrm{Vect}(e)$ et $u(e)$ est de la forme αe.
Si $\dim E = 2$: la matrice de u dans une base orthonormale de E est symétrique, de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_u = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$ de discriminant $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$.
L'endomorphisme u admet donc au moins une valeur propre réelle.
Si $\dim E > 2$: l'endomorphisme u admet au moins une droite ou un plan stable (lemme 3). L'endomorphisme induit sur cette droite ou ce plan est encore autoadjoint et possède (par les deux premiers cas qu'on vient de traiter) une valeur propre.

- Montrons maintenant (1) $\Rightarrow$ (2) : tout endomorphisme autoadjoint de E est diagonalisable dans une base orthonormale.

On procède par récurrence sur la dimension de E.
$\mathcal{P}_n$: « pour tout endomorphisme autoadjoint u d'un espace E de dimension n, il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u. »

— Soit E de dimension 1. La matrice de $u \in \mathscr{L}(E)$ dans cette base est diagonale. $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit u un endomorphisme autoadjoint en dimension $n+1$. Par le lemme, u admet une valeur propre réelle, et un vecteur propre associé x_0.
$F = \mathrm{Vect}(x_0)$ est stable par u. Par propriété, $F^\perp$ est stable par u autoadjoint.
u_F et $u_{F^\perp}$ sont encore autoadjoints (à vérifier rapidement). Par $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_n$, il existe $\mathcal{B}_1$ base orthonormée de F et $\mathcal{B}_2$ base orthonormée de $F^\perp$ constituées de vecteurs propres de u.
Comme $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$, la concaténation $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de E.
$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

- (1) $\Rightarrow$ (3). On poursuit le raisonnement précédent pour u un endomorphisme autoadjoint en dimension n. Puisque u est diagonalisable, E est somme directe des espaces propres de u. Et on a vu en lemme que les espaces propres étaient deux à deux orthogonaux.

- (3) $\Rightarrow$ (2). Si E est somme directe orthogonale d'espaces propres de u, alors une base orthonormale adaptée à cette somme directe est une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

- (2) $\Rightarrow$ (1). Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale, donc symétrique. Par propriété, u est autoadjoint.

Caractérisation spectrale – propriété 18

Notons qu'on pourrait utiliser l'exercice en page 12.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de u (par le théorème spectral), et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \qquad \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

- Supposons que $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

En prenant $x = e_j$ dans ce qui précède, on trouve $\lambda_j = \langle u(e_j), e_j \rangle \geqslant 0$.
Et si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, puisque $e_j \neq 0$, on trouve $\lambda_j > 0$.

- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.

Comme somme de positifs, $\langle u(x), x \rangle \geqslant 0$ et il a égalité si et seulement si, $\forall i$, $\lambda_i x_i^2 = 0$.
Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a donc bien aussi : $\langle u(x), x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.