Topologie des espaces vectoriels normés
– Espaces vectoriels normés, deuxième partie –

Topologie d'un espace normé

1. Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Une boule ouverte est un ouvert. Un produit d'ouverts est un ouvert. Voisinage d'un point.
2. Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit de fermés est fermé.
3. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.
4. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.
5. Partie dense.
6. Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert (resp. d'un fermé) de E.

Étude locale d'une application, continuité

7. Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle. Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
8. Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.
9. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.
10. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.
11. Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
12. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
13. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.

Applications linéaires et multilinéaires continues

14. Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés.
15. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
16. Critère de continuité des applications multilinéaires.

Parties compactes d'un espace normé

17. Définition d'une partie compacte.
18. Une partie compacte est fermée et bornée.
19. Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.
20. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
21. Produit de compacts.

Applications continues sur une partie compacte

22. Image d'un compact par une fonction continue. Théorème des bornes atteintes pour une fonction réelle continue sur un compact. On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation.
23. Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

24. Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.
25. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
26. Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
27. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
28. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
29. Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$. Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies. Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Connexité par arcs « *Un dessin pertinent peut valoir preuve.* »

30. Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.
31. Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
32. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
33. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
34. Image continue d'une partie connexe par arcs. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

Suites et séries de fonctions dans un espace vectoriel normé

Ce chapitre fait suite au chapitre Espaces vectoriels normés. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \|.\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les notions topologiques que nous allons présenter ne sont pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie.

1 Notions topologiques

1.1 voisinages, ouverts, fermés

Révisions : soit $a \in E$ et $r > 0$. On appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$.
- *boule fermée* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leqslant r\}$.
- *sphère* de centre a et de rayon r, l'ensemble $\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$.

Définition 1

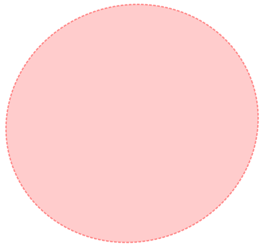
Soient A une partie de E et x un élément de E . On dit que :

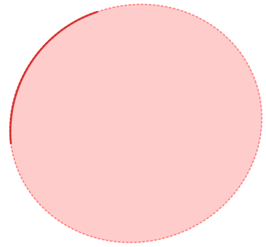
- A est un *voisinage* de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
- A est *un ouvert* de E si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si :

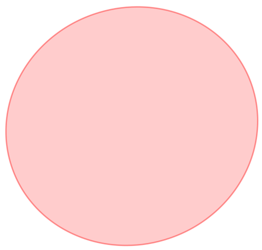
$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

- A est *un fermé* de E si son complémentaire est un ouvert.

On remarque que E et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de E.







La partie dessinée plusieurs fois ci-contre est :

— un ouvert si on la considère sans son contour,

— un fermé si on la considère avec son contour,

— ni un ouvert ni un fermé si on la considère avec une partie de son contour.

Propriété 1

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

Propriété 2

Toute union d'ouverts est un ouvert. Une union **finie** de fermés est un fermé.
Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Toute intersection de fermés est un fermé.

Remarques :

— L'exemple de
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \ldots\ldots$$
montre qu'une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert.

— La sphère $\mathcal{S}(a,r)$ est un fermé comme intersection des fermés $\mathcal{B}_f(a,r)$ et $E\setminus\mathcal{B}(a,r)$.
Les sphères sont des fermés.

Exemple : dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $]2,4[=\{x\in\mathbb{R},\ |x-3|<1\}$ est la boule ouverte de centre 3 et rayon 1 ; c'est un ouvert.

Plus généralement, dans $\mathbb{R}$,

$]a,b[$

$]a,+\infty[$

$]-\infty,b[$

$[a,b]$

$[a,+\infty[$

$]-\infty,b]$

$]a,b]$ n'est ni un ouvert ni un fermé
$[a,b[$ n'est ni un ouvert ni un fermé

Propriété 3 – produit d'ouverts

Soient $E_1,\dots,E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit $E_1\times\cdots\times E_p$ de la norme produit.

- Si $U_1,\dots,U_p$ sont des ouverts de $E_1,\dots,E_p$ respectivement, alors $U_1\times\cdots\times U_p$ est un ouvert de $E_1\times\cdots\times E_p$.
- Si $U_1,\dots,U_p$ sont des fermés de $E_1,\dots,E_p$ respectivement, alors $U_1\times\cdots\times U_p$ est un fermé de $E_1\times\cdots\times E_p$.

Par exemple,

$[0,1]\times\mathbb{R}^+$

$]-1,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,1[$

La définition d'une partie fermée n'est pas facile à manier. On dispose cependant d'une caractérisation pratique : pour montrer qu'une partie A est fermée, il suffit de montrer que toute suite convergente de A a sa limite dans A. Autrement dit, A est fermée lorsqu'on ne sort pas de A par passage à la limite !

On rappelle que, par définition, $u_n\to\ell$ lorsque .

Propriété 4 – caractérisation séquentielle des fermés

Une partie A de E est fermée si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de A a sa limite qui appartient à A.

Exercice 1 : En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés :

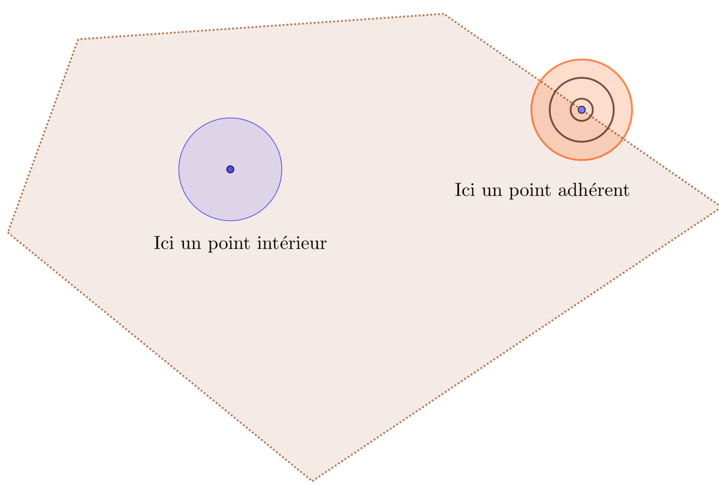
1. montrer que les singletons de E sont des fermés de E (les parties finies sont alors des fermés en tant que réunion finie de fermés),
2. montrer que l'intervalle $[0,1[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$,
3. montrer que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel est un fermé,
4. montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

1.2 intérieur, adhérence, frontière

Définition 2

Soient A une partie de E et x un élément de E.

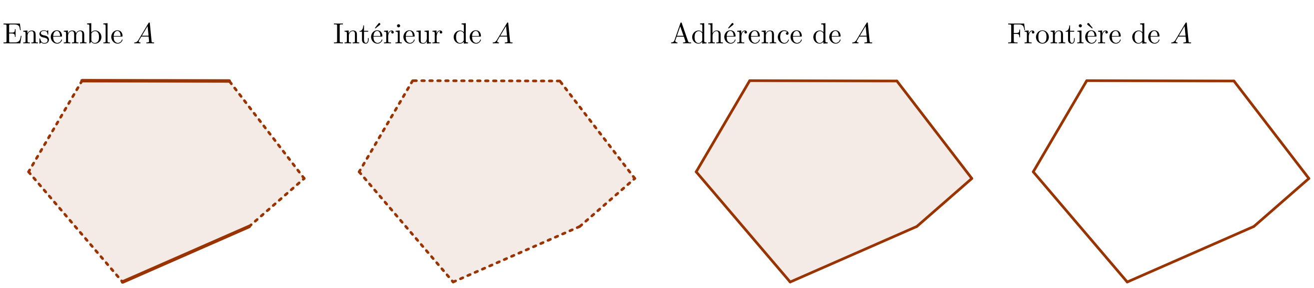
- x est un *point intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$, c'est-à-dire si A est un voisinage de x.
- x est un *point adhérent* à A si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.



Définition 3

Soit A une partie de E.

- On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
- On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.



Propriété 5

- L'intérieur de A est un ouvert de E, c'est le plus grand des ouverts inclus dans A.
- L'adhérence de A est un fermé de E, c'est le plus petit des fermés contenant A.
- La frontière de A est un fermé de E.

On a $\quad \mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Il s'ensuit que A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$, et que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Propriété 6 – caractérisation séquentielle des points adhérents

Un point x de E est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Reformulons : l'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans A.

Par exemple, la matrice nulle est adhérente à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ car les matrices $\frac{1}{n}I_r$ sont inversibles et tendent vers la matrice nulle.

Exercice 2 : Montrer que si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Propriété 7

Si l'espace vectoriel E est muni de deux normes N et N' équivalentes, alors (E, N) et (E, N') ont les mêmes voisinages, ouverts, fermés, intérieurs et adhérences.

1.3 parties denses dans E

Définition 4

On dit que A est *une partie dense dans* E quand l'adhérence de A est égale à E.

— Dans le chapitre Suites et séries de fonctions, nous avons vu que l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ était dense dans $(\mathcal{CM}([a, b], F), \|.\|_\infty)$ où F est un espace vectoriel de dimension finie, et que l'ensemble des fonctions polynomiales était dense dans $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

— En première année, vous avez vu que : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

✎ Exercice 3 : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.4 topologie relative à une partie

On voudrait ici avoir de « bons voisinages » lorsqu'on modifie (légèrement) l'ensemble de travail. Par exemple, on conçoit que si $[0, \varepsilon[$ n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, il a une bonne tête pour être voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^+$. Nous admettons les équivalences dans les définitions suivantes, dans lesquelles A est une partie de E (pas forcément un espace vectoriel, donc) et $a \in A$.

Définition 5

On dit qu'une partie V de A est un voisinage relatif de a dans A quand c'est l'intersection d'un voisinage de a dans E avec A.

$$V = A \cap \mathcal{V} \quad \text{avec } \mathcal{V} \text{ voisinage de } a \text{ dans } E$$

Définition - propriété 1

On dit qu'une partie Ω de A est un ouvert relatif de A quand Ω est voisinage relatif de chacun de ses points, ou de manière équivalente, si Ω est l'intersection d'un ouvert de E avec A :

$$\Omega = A \cap \mathcal{U} \quad \text{avec } \mathcal{U} \text{ ouvert de } E$$

Définition - propriété 2

On dit qu'une partie F de A est un fermé relatif de A quand c'est le complémentaire dans A d'un ouvert relatif de A, ou de manière équivalente, si F est l'intersection d'un fermé de E avec A :

$$F = A \cap \mathcal{F} \quad \text{avec } \mathcal{F} \text{ fermé de } E$$

Par exemple,

$[0, \dfrac{1}{2}[$ est un ouvert relatif de $[0, 1]$ car

$]0, 3]$ est un fermé relatif de $\mathbb{R}^{+*}$ car

2 Étude locale d'une application dans un espace vectoriel normé, continuité

E et F sont des espaces vectoriels normés et f est une application de $A \subset E$ dans F.
Toutes les propriétés vues dans cette section restent inchangées si on remplace les normes des espaces vectoriels normés considérés par des normes équivalentes. En particulier, elles ne dépendent pas du choix de la norme lorsque les espaces sont de dimension finie. Dans la pratique, on va s'intéresser à :

— des fonctions numériques d'une ou plusieurs variables réelles

— des fonctions d'une variable complexe (conjugaison $z \mapsto \overline{z}$, exponentielle complexe $z \mapsto e^z$,...)

— aux applications d'une variable matricielle, par exemple det : $A \mapsto \det(A)$, $A \mapsto A^{-1}$, applications linéaires ou multilinéaires...

2.1 limite

Définition - propriété 3

Soit $f : A \subset E \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. On dit que f a pour limite ℓ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Lorsqu'elle existe, la limite est unique.
On note $\lim\limits_{a} f = \ell$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

On aurait pu présenter la définition avec des inégalités larges. On peut reformuler :
f admet pour limite ℓ en a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage U de a relatif à A tel que $f(U) \subset V$
ou encore en termes de boules : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{B}(a,\alpha) \cap A, \quad f(x) \in \mathcal{B}(\ell,\varepsilon).$

Dans toute la suite, $f : A \subset E \to F$ et $a \in \overline{A}$. La propriété suivante va permettre d'utiliser les résultats obtenus sur les suites dans un espace vectoriel normé pour établir de nombreuses propriétés sur les limites.

Propriété 8 – caractérisation séquentielle de la limite

L'application f admet pour limite ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A tendant vers a, on a $\lim f(u_n) = \ell$.

En conséquence, on a facilement les propriétés :

- limite d'une combinaison linéaire : $\lim\limits_a (\lambda f + \mu g) = \lambda \lim\limits_a f + \mu \lim\limits_a g$
- limite d'une composée
- le théorème d'encadrement : si $\|f(x) - \ell\| \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_a g = 0$, alors $\lim\limits_a f = \ell$
- pour des fonctions à valeurs réelles, on peut passer à la limite dans une inégalité large
- pour des fonctions à valeurs complexes, on peut faire le produit de limites, et on peut faire le quotient de limites si la limite au dénominateur est différente de 0
- on peut raisonner par composantes dans un espace produit d'espaces vectoriels normés $(f_1(x), \dots, f_p(x)) \xrightarrow[x \to a]{} (\ell_1, \dots, \ell_p)$ équivaut à $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lim\limits_a f_i = \ell_i$.

  En particulier, dans $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (a,b)$ si et seulement si $(x \to a,\ y \to b)$.

Exercice 4 : On se méfie de la gestion de doubles limites...
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{p \to +\infty} (1 - \frac{1}{n})^p$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n})^p$.

$\begin{cases} x^2 \leqslant x^2 + y^2 \\ y^2 \leqslant x^2 + y^2 \end{cases}$ donc $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} \right.$
et on a l'inégalité classique

Exercice 5 :

1. Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} x^2 - 3y + xy$.
2. Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. Montrer à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite que $\frac{x+y^2}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Définition 6 – extension – limite infinie pour une fonction réelle

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A.

- On dit que f tend vers $+\infty$ en a si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M$$

- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M$$

Définition 7 – extension – limite quand $\|x\| \to +\infty$

Soit $f : A \subset E \to F$ avec A partie non bornée.
On dit que f tend vers ℓ quand $\|x\| \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ \|x\| \geqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$.

Définition 8 – extension – limite en $\pm\infty$ quand $A \subset \mathbb{R}$

- Si $-\infty$ est adhérent à A (cas où A n'est pas minorée), on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

- Si $+\infty$ est adhérent à A (cas où A n'est pas majorée), on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant K \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Je vous laisse définir, quand f est à valeurs réelles, $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = -\infty$.
On peut également donner une caractérisation séquentielle de la limite dans chacun de ces cas, avec les conséquences qui en découlent.

Exercice 6 :

1. Dans $\mathbb{C}$, calculer $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{1}{z+1}$.
2. Dans $\mathbb{C}$, pour P polynôme non constant, montrer que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.

2.2 continuité

Définition 9

Soit f une application d'une partie D de E à valeurs dans F.

- Lorsque a appartient à D, on dit que f est continue au point a quand $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D quand elle est continue en tout point de D.
- Lorsque a n'appartient pas à D et que f admet une limite ℓ en a, on dit que f se prolonge par continuité en a.

Les résultats établis sur les limites nous apportent la continuité : d'une combinaison linéaire d'applications continues, du produit d'une application continue avec une application scalaire continue, de la composée d'applications continues, et dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, de l'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas.
Nous avons aussi la caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si pour toute suite (x_n) d'éléments de A tendant vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Propriété 9

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Définition 10

Soit $k \geqslant 0$. On dit que l'application f est k-lipschitzienne ou lipschitzienne de rapport k si :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Cette définition dépend des normes utilisées dans E et F. Mais des normes équivalentes définissent les mêmes applications lipschitziennes (pas forcément de même rapport).

Propriété 10

Toute application lipschitzienne est continue.

Exercice 7 : Montrer la continuité des applications suivantes (vous comprendrez tout seuls les ensembles)

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i, \quad z \mapsto \mathrm{Re}(z) \text{ et } z \mapsto \mathrm{Im}(z), \quad A \mapsto a_{i,j}$$

Propriété 11 – – exercice classique

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Les applications $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont 1-lipschitziennes donc continues sur E.

Application : si f est continue, $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue, comme composée des applications f et $y \mapsto \|y\|$.

2.3 continuité uniforme

La définition suivante généralise la notion de continuité uniforme déjà vue en première année pour les fonctions d'une variable réelle. Vous avez notamment rencontré le théorème de Heine (que dit-il ?), sur lequel nous reviendrons plus loin.

Définition - propriété 4

On dit que f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall (x,y) \in A^2, \ \|x - y\| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

On peut énoncer la définition avec des inégalités strictes ou larges.

Propriété 12

On a les implications :

$$\boxed{f \text{ lipschitzienne}} \Rightarrow \boxed{f \text{ uniformément continue}} \Rightarrow \boxed{f \text{ continue}}$$

Les réciproques sont fausses.

2.4 images réciproques et continuité

Propriété 13

Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue.

- L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.
- L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.

En particulier, pour $f : E \to F$ continue, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert de E, l'image réciproque d'un fermé est un fermé de E.

> Ce résultat est très utile pour montrer qu'une partie est ouverte/fermée. Par exemple, si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors :
>
> $$\{x \in E,\ \varphi(x) > 0\} = \varphi^{-1}(]0, +\infty[) \text{ est un ouvert ;} \quad \{x \in E,\ \varphi(x) \geqslant 0\} = \varphi^{-1}([0, +\infty[) \text{ est fermé ;}$$
>
> $$\{x \in E, \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\}) \text{ est fermé.}$$

Exercice 8 : Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Le représenter.

Exercice 9 : Exercice récapitulatif. Montrer de trois façons que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$:

1. par la définition d'un fermé,
2. par la caractérisation séquentielle des fermés,
3. en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue (on pourra penser à une fonction trigonométrique).

3 Applications linéaires et multilinéaires continues et normes d'opérateurs

3.1 critère de continuité des applications linéaires

Propriété 14 – critère de continuité des applications linéaires

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. u est continue si et seulement s'il existe C réel positif tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

On peut reformuler ce théorème : pour qu'une application linéaire soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit lipschitzienne, qu'elle soit uniformément continue, qu'elle soit bornée sur la boule unité. Je vous laisse y réfléchir !

Méthode – justifier la continuité (ou non) d'une application linéaire

On peut :

- regarder la dimension de E. Nous verrons que lorsque E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
- majorer $\|u(x)\|$ afin de trouver C tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$ et appliquer le critère de continuité des applications linéaires.
- raisonner par l'absurde en supposant que u satisfait le critère de continuité des applications linéaires et trouver une suite (x_n) rendant absurde l'inégalité $\|u(x_n)\| \leqslant C\|x_n\|$ (souvent, en faisant tendre n vers l'infini).

Exercice 10 : Soit D l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$ donné par $D(P) = P'$.

1. Montrer que si on munit E de la norme $N_1 : P \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$, alors D est continue.
2. Montrer que si on munit E de la norme $N_2 : P \mapsto \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$, alors D n'est pas continue.

Exercice 11 : Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |u_n|$ converge. On admet que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

1. Soit $\varphi : u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer que φ est continue sur E.
2. Soit $F = \{u \in E,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1\}$. Montrer que F est fermé. Montrer que F n'est pas borné.

3.2 espace $\mathscr{L}_c(E,F)$ et norme subordonnée

On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
Comme $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$, $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.

Propriété 15

Soient E et F des espaces vectoriels normés et $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Alors les trois bornes supérieures suivantes sont finies et égales :

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

On note $|||u|||$ ou $\|u\|_{\text{op}}$ leur valeur commune.

L'application $u \in \mathscr{L}_c(E,F) \mapsto |||u|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ appelée *norme d'opérateur* ou *norme subordonnée* aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

Par définition, si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$, $\quad \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||.\|x\|$

Exercice 12 : Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes bornées, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $u \in E$, on pose

$$T(u) = w \quad \text{où} \quad w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue sur E.
2. Calculer la norme d'opérateur de T.

Exercice 13 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$. Pour $f \in E$, et pour $x \in [0,1]$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On admet que Φ est une application linéaire. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que Φ est continue sur E.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = ne^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$. En déduire la norme de Φ subordonnée à la norme $\|.\|_1$.

Méthode – pour montrer que $|||f||| = D$

- On montre que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant D\|x\|$. Ainsi f est continue.

  Pour tout $x \neq 0$, on a $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant D$. Donc $|||f||| \leqslant D$.

- On repart alors de :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant |||f|||\,\|x\| \ \text{ soit } \ \forall x \neq 0,\ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||f|||$$

  Puis on peut :
  — éventuellement déterminer un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = D$
  — ou déterminer une suite (x_n) de vecteurs non nuls de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} = D$.

  Ceci montre que $|||f||| \geqslant D$. En définitive, $|||f||| = D$.

Propriété 16

Pour $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}_c(F,G)$, on a $|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||$. On dit que $|||.|||$ est *sous-multiplicative.*

Définition 11 – adaptation matricielle

Supposons $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ munis d'une norme. On appelle *norme subordonnée* de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et on note $|||A|||$, la norme de l'application linéaire canoniquement associée à A. $|||.|||$ définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On a pour X colonne, $\quad |||A||| = \sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup\limits_{\|X\|\leqslant 1} \|AX\| = \sup\limits_{\|X\|=1} \|AX\|.$

$|||.|||$ est sous-multiplicative. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leqslant |||A|||.|||B|||$.

Exercice 14 : Déterminer $|||A|||$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ quand $\mathbb{R}^2$ est muni de $\|.\|_1$.

3.3 applications multilinéaires

Dans ce paragraphe, $E_1, E_2, \dots, E_p$ et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de la norme produit.
On rappelle qu'une application $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est *multilinéaire*, ou *p-linéaire*, si elle est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ et tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$y \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \quad \in \mathscr{L}(E_i, F)$$

Conformément au programme, nous admettons la propriété suivante.

Propriété 17 – critère de continuité des applications multilinéaires

Une application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue si, et seulement s'il existe $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leqslant C \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_p\|$$

Nous verrons plus loin que si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont de dimension finie, toute application multilinéaire $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.

Exercice 15 : Soit E un espace euclidien. Montrer que l'application produit scalaire est continue.

4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

4.1 notion de compacité

Nous avons vu dans le chapitre Espaces vectoriels normés qu'on appelle :

- suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
- valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite $\ell \in E$ de sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ. La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. En revanche, une suite qui possède une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.

Définition 12

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel normé E est une *partie compacte* ou *un compact* si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge dans A.

Remarques :

— On peut reformuler : A est compacte si, et seulement si, toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A..

— La définition d'une partie compacte s'appuie sur la convergence des suites. Elle dépend donc de la norme utilisée. Mais deux normes équivalentes définissent les mêmes compacts.

— Toute partie finie est compacte.

— Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compacte.

Propriété 18

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Exercice 16 : Nous verrons qu'en dimension finie, la réciproque est vraie. Mais en général, la réciproque est fausse. On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$.
On considère la sphère unité S. Vérifier que S est fermée et bornée mais non compacte.

Propriété 19

Tout fermé inclus dans un compact est compact.

Théorème 1

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Propriété 20 – produit de compacts

Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés et $A_1, \dots, A_p$ des compacts de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un compact de l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$.

4.2 ♡ continuité et compacité

Théorème 2

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

On déduit de ce théorème la généralisation du théorème de première année : « toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ». Ce résultat sera très utile dans les problèmes d'optimisation, pour prouver l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

Théorème 3 – ♡ théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 4 – théorème de Heine

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.

5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

5.1 équivalence des normes en dimension finie

Théorème 5

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ce puissant théorème est admis, conformément au programme. Rappelons (propriété rencontrée au chapitre Espaces vectoriels normés) que la convergence d'une suite équivaut à celle de ses suites composantes dans une base. De même, si f est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la continuité de f (ou plus généralement l'étude de la limite de f en un point) se ramène à celle de ses applications composantes dans une base.

5.2 compacts en dimension finie

Théorème 6

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

> Nous en déduisons par exemple :
> — En dimension finie, la boule unité fermée et la sphère unité sont compactes.
> — Toute application continue sur un fermé borné en dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 7 – théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée d'un espace vectoriel F de dimension finie, on peut extraire une sous-suite convergeant dans F.

Propriété 21

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé.

Par exemple, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit, toute limite de suites de matrices symétriques est une matrice symétrique.

5.3 continuité des applications (multi)linéaires et polynomiales

Théorème 8

- Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
- Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie, toute application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue.

Exercice 17 : Soit P une matrice inversible d'ordre n. Montrer que $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18 : Montrer que l'ensemble des matrices de trace strictement positive est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19 : Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}$ est continue sur E^n.

✎ Exercice 20 :

1. Montrer que le produit matriciel $p : (A, B) \mapsto AB$ est continu sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.
2. Montrer que la composition $c : (f, g) \mapsto g \circ f$ est continue sur $(\mathscr{L}_c(E))^2$.

Définition 13

On appelle :

— *monôme* sur $\mathbb{K}^p$ toute application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ de la forme

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p} \text{ où les } n_i \text{ sont entiers naturels}$$

— *fonction polynomiale* sur $\mathbb{K}^p$ toute combinaison linéaire de monômes.

Par exemple, $P : (x, y, z) \mapsto \sqrt{2}xy^5 - xyz^2 + z$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 14

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On appelle :

— *monôme* sur E toute application $f : E \to \mathbb{K}$ de la forme

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \mapsto x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p} \text{ où les } n_i \text{ sont entiers naturels}$$

— *fonction polynomiale* sur E toute combinaison linéaire de monômes.

Remarque : si f est une fonction polynomiale dans une base $\mathcal{B}$, c'est encore une fonction polynomiale dans une base $\mathcal{B}'$. Par formule de changement de bases, $X = PX'$, donc si f est polynomiale en les x_i, elle est aussi polynomiale en les x'_i.

Propriété 22

Toute application polynomiale d'un espace vectoriel de dimension finie est continue.

Par exemple, l'application $M \mapsto M^3$ est continue car les coefficients de M^3 sont polynomiaux en les coefficients de M.

✎ Exercice 21 : Montrer que $\det : M \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappeler $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$ (qu'on a rencontré dans un exercice plus haut).

6 Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

E désigne toujours un espace vectoriel normé.

Définition 15

Soit $(a,b) \in E^2$. On appelle *chemin (ou arc) continu* joignant a à b toute application continue γ de $[0,1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

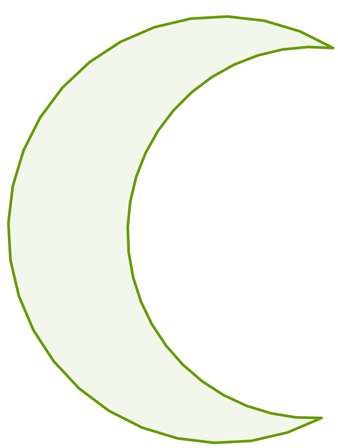
Par exemple, pour relier a et b par ce qu'on appelle un segment, on prend le chemin :
$\gamma(t) =$

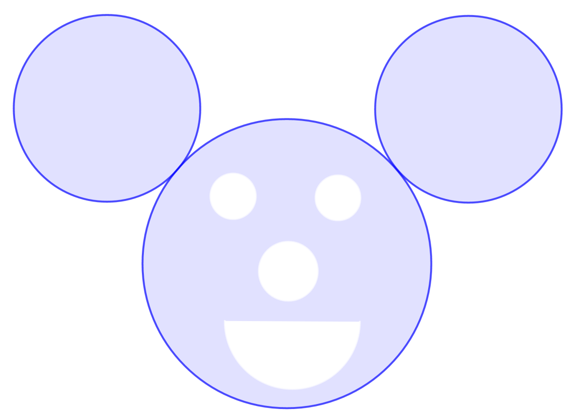
Définition 16

Une partie A de E est *connexe par arcs* si pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe un chemin continu joignant a à b à valeurs dans A.

Remarques :

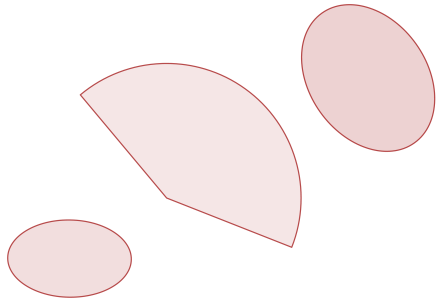
- Par exemple, les parties convexes de E sont connexes par arc, puisqu'on peut relier deux points de cette partie par un chemin continu (un segment), en restant dans la partie.
- On pourrait remplacer le segment $[0,1]$ par n'importe quel autre segment de $\mathbb{R}$.
- L'existence d'un chemin continu entre a et b revient schématiquement à joindre les deux points à l'aide d'un stylo sans lever le crayon.





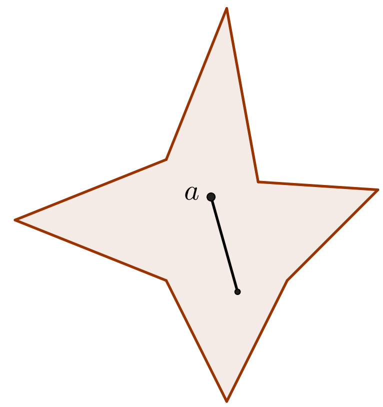
Propriété 23

On définit : $a \mathcal{R} b$ s'il existe un chemin continu à valeurs dans A joignant a et b. La relation binaire ainsi définie est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont les *composantes connexes par arcs*.



Une partie est connexe par arcs si et seulement si elle n'admet qu'une seule composante connexe par arcs. Ci-contre, nous avons trois composantes connexes par arcs, chacune est connexe par arcs.

Il résulte de la transitivité de $\mathcal{R}$ que les parties *étoilées* (parties A pour lesquelles il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $[a, x] \subset A$) sont connexes par arcs.



Propriété 24

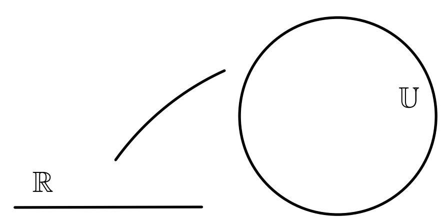
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Propriété 25

Soient $f : E \to F$ une application continue et A une partie connexe par arcs de E. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Exemple : $\mathbb{U}$ est connexe par arcs car c'est l'image de $\mathbb{R}$, connexe par arcs, par la fonction continue

....



Corollaire 1 – théorème des valeurs intermédiaires généralisé

Pour $f : E \to \mathbb{R}$ une application, l'image de toute partie connexe par arcs est un intervalle.

Exemple : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, det est continue, et $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs.

7 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 1

- Faire un schéma évidemment !

Soit $x \in \mathcal{B}(a, r)$. On a $\|x-a\| < r$. Soit $y \in \mathcal{B}(x, r - \|x-a\|)$. On a

$$\|y-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| < r - \|x-a\| + \|x-a\|$$

donc $\|y-a\| < r$ et $y \in \mathcal{B}(a, r)$.

- Soit $x \notin \mathcal{B}_f(a, r)$. On a $\|x-a\| > r$. Soit $y \in \mathcal{B}(x, \|x-a\| - r)$.

$$\|x-a\| \leqslant \|y-a\| + \|x-y\| < \|y-a\| + \|x-a\| - r$$

donc $r < \|y-a\|$ et $y \notin \mathcal{B}_f(a, r)$.

Propriété 3

Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U_1 \times \cdots \times U_p$. Pour tout i compris entre 0 et p, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a_i, r_i) \subset U_i$ (boule pour la norme N_i). Posons $r = \min(r_1, \ldots, r_p)$. On a $r > 0$. Soit $x \in B(a, r)$ (boule pour la norme produit). On rappelle que la norme produit est définie par

$$N(t) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i(t_i)$$

Donc pour tout i, $N_i(x_i - a_i) \leqslant N(x-a) < r \leqslant r_i$, et donc $x_i \in U_i$, et x est dans le produit des U_i.

Pour un produit de fermés, c'est plus pratique d'utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. On passe.

Propriété 4

- Supposons que A est un fermé et soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ.

Par l'absurde, supposons que $\ell \notin A$. Comme $E \setminus A$ est un ouvert, il existe un voisinage de ℓ contenu dans $E \setminus A$, autrement dit, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(\ell, r) \subset E \setminus A$.
Comme x_n tend vers ℓ, ce voisinage de ℓ contient tous les x_n à partir d'un certain rang n_0 :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| < r \text{ et donc } x_n \in \mathcal{B}(\ell, r) \subset E \setminus A$$

Ceci contredit : $x_n \in A$.

- Supposons que toute suite d'éléments de A qui converge a sa limite dans A. Raisonnons là encore par l'absurde en supposant que A n'est pas un fermé. Alors $E \setminus A$ n'est pas un ouvert. Il existe $y \in E \setminus A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(y, \frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans $E \setminus A$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$ tel que $x_n \in A$. Ceci nous fournit une suite (x_n) d'éléments de A qui tend vers $y \notin A$. C'est exclu.

Propriété 5

Je ne montrerai, au mieux, que la propriété sur les ouverts (celle avec les fermés est difficile à suivre).

- Montrons que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. Pour cela, montrons que $\mathring{A} = \Omega$ où Ω est la réunion de tous les ouverts inclus dans A (c'est donc bien un ouvert de E).
  - Soit $x \in \mathring{A}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ et $B(x, r)$ est un ouvert, donc $B(x, r) \subset \Omega$. Ainsi, $x \in \Omega$.
  - Soit $x \in \Omega$. x appartient à un ouvert inclus dans A donc appartient à une boule incluse dans A : $x \in \mathring{A}$.

- Montrons que $\overline{A}$ est égal à F, intersection de tous les fermés contenant A (ainsi $\overline{A}$ est un fermé).
  - Soit $x \in F$.
    Si $x \notin \overline{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. On a alors $B(x, r) \subset E \setminus A$, puis $A \subset E \setminus B(x, r)$. Mais $E \setminus B(x, r)$ apparaît alors comme un fermé qui contient A. Donc $F \subset E \setminus B(x, r)$. Ce qui est contradictoire avec $x \in F$... donc $x \in \overline{A}$.
  - Soit $x \in \overline{A}$. Par l'absurde, supposons que $x \notin F$.
    $E \setminus F$ est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus F$. On a $F \subset E \setminus B(x, r)$.
    Donc $A \subset F \subset E \setminus B(x, r)$. Et enfin, $B(x, r) \subset E \setminus A$, ce qui contredit $x \in \overline{A}$. Donc $x \in F$.

- La frontière est un fermé puisque $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$.

Propriété 6

- Soit $x \in \overline{A}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$ donc il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$. La suite (x_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers x.

- Soit x limite d'une suite (a_n) d'éléments de A.

Soit $r > 0$. $B(x, r)$ contient tous les a_n pour n suffisamment grand, donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Donc $x \in \overline{A}$.

Propriété 7

Montrons l'invariance des fermés par usage de normes équivalentes. Soit A une partie de E fermée pour la norme N.
Soit (u_n) une suite d'éléments de A convergeant vers ℓ pour N'. On a vu au chapitre Espaces vectoriels normés que (u_n) convergeait également pour la norme N. Comme A est fermé pour N, $\ell \in A$.
Donc A est un fermé pour N'.
Comme les ouverts sont les complémentaires des fermés, on a aussi l'invariance des ouverts par usage de normes équivalentes.

Propriété 8

- Supposons $\lim\limits_a f = \ell$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A qui tend vers a.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in B(a, \alpha) \cap A$, on a $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$.
Par convergence de u vers a, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in B(a, \alpha)$. On a donc $\|f(u_n) - \ell\| < \varepsilon$.
La suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.

- Pour l'autre implication, on raisonne par contraposée. Supposons que f ne tende pas vers ℓ quand x tend vers a. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha_n = \frac{1}{n+1} > 0$, il existe $x_n \in B(a, \alpha_n) \cap A$ tel que $f(x_n) \notin B(\ell, \varepsilon)$.

Comme $\|x_n - a\| < \frac{1}{n+1}$, on a $\lim x_n = 0$. Comme $\|f(x_n) - \ell\| \geqslant \varepsilon$, $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ.

Propriété 9

Soient D une partie dense dans A, et g et f telles que : $\forall x \in D,\ f(x) = g(x)$. Soit $a \in A$. Par densité de D dans A, il existe (x_n) une suite d'éléments de D de limite a. On a $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout n. Par continuité de f et g en a, $f(x_n) \to f(a)$ et $g(x_n) \to g(a)$. Par unicité de la limite d'une suite, $f(a) = g(a)$.

Propriété 10

C'est tout simplement immédiatement le théorème d'encadrement !

Propriété 12

- Soit f une application k-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$.

On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$. Pour x et y dans A vérifiant $\|x - y\| \leqslant \eta$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\| \leqslant \varepsilon$$

f est donc uniformément continue.

- La continuité uniforme entraîne la continuité (facile).
- Soit $f : x \mapsto x^2$. f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que f n'est pas uniformément continue.

On prend $\varepsilon = 1$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leqslant 1$. Pour x réel et $y = x + \eta$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |2\eta x + \eta^2| \leqslant 1$$

c'est contradictoire (avec $x \to +\infty$).

- Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{pmatrix}$. Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas lipschitzienne.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f est k-lipschitzienne. Je prends $y = 0$, ça donne $|\sqrt{x}| \leqslant k|x|$, puis pour $x > 0$, $1 \leqslant k\sqrt{x}$. Contradictoire avec $x \to 0$.
Lemme : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.
Vrai car équivalent à $x + y - 2\sqrt{xy} \leqslant |x - y|$, et dans le cas où $x \geqslant y$, équivalent à $x + y - 2\sqrt{xy} \leqslant x - y$ puis $2\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \leqslant 0$, ce qui est vrai.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \varepsilon^2 > 0$. Si $|x - y| \leqslant \eta$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \varepsilon$.

Propriété 13 dans le cas où $A = E$

Soit $f : E \to F$ une application continue.

- Soit U un ouvert de F.

Soit $a \in f^{-1}(U)$. On a $f(a) \in U$, et comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(f(a), r) \subset U$.
Par continuité de f en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in B(a, \eta)$, on ait $f(x) \in B(f(a), r)$. Ainsi pour $x \in B(a, \eta)$, $x \in f^{-1}(U)$.
$B(a, \eta) \subset f^{-1}(U)$.

- Soit R un fermé de F. Soit (x_n) une suite convergente (vers ℓ) d'éléments de $f^{-1}(R)$.

Comme f est continue en ℓ, $\lim f(x_n) = f(\ell)$. Comme $(f(x_n))$ est une suite de F et que F est fermé, $f(\ell) \in R$. Donc $\ell \in f^{-1}(R)$.

Propriété 14 : critère de continuité des applications linéaires

- Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ continue. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = u(0) = 0$ et on prend $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité en 0 :

$$\exists \eta > 0,\ \|t\| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \|u(x)\| \leqslant 1$$

Soit $x \in E$. Si $x = 0$, on a $\|u(0)\| = \|0\|$. Si $x \neq 0$, on prend $t = \frac{\eta}{\|x\|}x$ et on a $\|t\| \leqslant \eta$. Donc

$$\|u(\frac{\eta}{\|x\|x})\| \leqslant 1 \text{ et par linéarité de } u,\ \frac{\eta}{\|x\|}\|u(x)\| \leqslant 1$$

$C = \frac{1}{\eta}$ convient.

- On suppose l'existence de C tel que pour $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Soit $a \in E$.

$$\|u(x-a)\|C \leqslant \|x-a\| \text{ et par linéarité de } u,\ \|u(x) - u(a)\| \leqslant C\|x-a\|$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = u(a)$.

Propriété 15

- L'ensemble $\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (majorée d'après le critère de continuité des applications linéaires). Donc cet ensemble admet une borne supérieure. Même chose pour l'existence des deux autres bornes supérieures. On a facilement

$$(*)\ \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|u(x)\| \quad \text{et} \quad (**)\ \sup_{x\in E\setminus\{0\}, \|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| \geqslant \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$$

— Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Par linéarité de u,

$$\|u(x)\| = \|x\|\|u(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \|x\| \sup_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|$$

et donc $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \sup\limits_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|$.

Par passage au sup, $\sup\limits_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \sup\limits_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|$. On a donc une égalité dans $(*)$.

— Soit x non nul de norme inférieure ou égale à 1. $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1. On a donc

$$\|u(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant \sup_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|$$

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|$$

$$\|u(x)\| \leqslant (\sup_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|) \times \|x\| \leqslant (\sup_{t\in E,\ \|t\|=1} \|u(t)\|)$$

On a donc une égalité dans $(**)$.

- Vérifions que $|||.|||$ est une norme.

Séparation : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant |||u|||.\|x\|$ donc si $|||u||| = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$ pour tout x, puis $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Inégalité triangulaire : Soient u et w des applications linéaires continues. Soit x un vecteur de norme 1.

$$\|(u+w)(x)\| = \|u(x) + w(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|w(x)\| \leqslant |||u||| + |||w|||$$

Et donc $|||u+w||| \leqslant |||u||| + |||w|||$.

Homogénéité : Soit λ dans $\mathbb{K}$.

$$|||\lambda u||| = \sup\{\|\lambda u(x)\|,\ \|x\| = 1\} = \sup\{|\lambda|\|u(x)\|,\ \|x\| = 1\}$$

On a vu au chapitre Espaces vectoriels normés que pour $k \in \mathbb{R}^+$, $\sup(kA) = k\sup(A)$. Donc

$$|||\lambda u||| = |\lambda| \sup\{\|u(x)\|,\ \|x\| = 1\} = |\lambda| \cdot |||u|||$$

Propriété 16

Facile : $\|v(u(x))\| \leqslant |||v||| \cdot \|u(x)\| \leqslant |||v||| \cdot |||u||| \cdot \|x\|$.

Toute partie finie est compacte (page 15)

Soit u une suite à valeurs dans $\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_p\}$. Il existe i tel que $\{a_i\}$ contienne une infinité de termes de la suite. Soit v

la sous-suite de u constituée de tous les termes de u qui valent a_i. v est constante, et converge vers a_i.

Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compacte (page 15)

Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit u une suite de A.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass vu en première année, de toute suite bornée de $\mathbb{C}$, on peut extraire une sous-suite convergente. Donc on peut extraire de u une sous-suite convergente. Cette sous-suite est constituée d'éléments de A, et A est fermé, donc la limite de la sous-suite est dans A.

Propriété 18

Soit A une partie compacte de E.
- A est fermée. En effet, soit u une suite d'éléments de A convergeant vers ℓ. Par compacité de A, il existe une sous-suite qui converge dans A. Or toutes les sous-suites d'une suite convergente tendent vers ℓ. Donc $\ell \in A$.
- A est bornée. Supposons qu'elle ne le soit pas. On pourrait alors construire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ tel que $\|x_n\| > n$. On a $\lim \|x_n\| = +\infty$. Donc $\lim \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty$ (au besoin $\varphi(n) \geqslant n$ donne $\lim \varphi(n) = +\infty$). Donc $(x_{\varphi(n)})$ diverge.

Propriété 19

Soit F un fermé inclus dans A compact. Soit (x_n) une suite d'éléments de F.
Comme A est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente. Cette sous-suite est formée de termes appartenant à F et F est fermé. Donc sa limite ℓ appartient à F. On a donc réussi à extraire de (x_n) une sous-suite convergente dans F. F est compact.

Théorème 1

($\Rightarrow$) vrai même si on n'est pas dans un compact.
($\Leftarrow$) Soit une suite (u_n) d'éléments du compact A et admettant une unique valeur d'adhérence a. On veut montrer que (u_n) converge vers a. Par l'absurde, si (u_n) ne tend pas vers a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $\|u_n - a\| > \varepsilon$.
On arrive avec ça à construire une sous-suite v de (u_n) telle que $\|v_n - a\| > \varepsilon$.
Puisque A est compact, on peut extraire une suite convergente de v. Sa limite est une valeur d'adhérence de v, mais aussi de u, donc vaut a. Donc $0 \geqslant \varepsilon$. C'est exclu.

Propriété 20 dans le cas de deux espaces

Soit $(x_n) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ une suite de $A_1 \times A_2$. Puisque A_1 est compact, on peut extraire de $(x_n^{(1)})$ une suite convergente $(x_{\varphi(n)}^{(1)})$. Puisque A_2 est compact, on peut extraire de $(x_{\varphi(n)}^{(2)})$ une suite convergente, d'extraction ψ. La suite $(x_{\psi(n)})$ converge, et converge dans $A_1 \times A_2$.
Rappel : une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge.

Théorème 2

Soit f continue et A compact. Soit $(y_n) = (f(x_n))$ une suite de $f(A)$.
Puisque A est compact, (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence : $a \in A$, limite de la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$.
On a $\lim x_{\varphi(n)} = a$. Par continuité de f, $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(a)$. Donc (y_n) admet au moins une valeur d'adhérence.

Théorème 3 (des bornes atteintes)

Ici f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$f(A)$ est un compact donc $f(A)$ est fermée et bornée. Donc f est bornée. Et il existe $s = \sup f(A)$. Il existe une suite $(s_n) = (f(a_n))$ de limite s. Comme $f(A)$ est fermée, $s \in f(A)$. Même chose avec l'inf.

Théorème 4 (de Heine)

Même principe que la démonstration de MPSI, valable sur un segment. Nous allons raisonner par l'absurde. Soit f continue sur A une partie compacte de E. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur A :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in A,\ \|x - y\| < \alpha \text{ et } \|f(x) - f(y)\| \geqslant \varepsilon$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in A$ tels que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon$. On peut extraire de la suite (x_n) (puisque A est compact) une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, convergeant vers $a \in A$.
$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{n}$ donc $(y_{\varphi(n)})$ converge elle aussi vers a.
Par continuité de f, $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(a) = \lim f(y_{\varphi(n)})$. On a une contradiction dans $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \geqslant \varepsilon$.

Théorème 6

On a déjà vu que les compacts sont fermés et bornés.
Réciproquement, soient A une partie fermée et bornée de E, supposé de dimension finie, et une suite (x_n) d'éléments de A. Soit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E.
Par équivalence des normes, A est fermée et bornée au sens de la norme $\|y\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |y_k|$.

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall y \in A,\ \|y\|_\infty \leqslant M$$

On écrit $x_n = \sum_{k=1}^{p} x_n^{(k)} e_k$. Les suites de coordonnées $(x_n^{(k)})_n$ sont bornées (puisque pour tout $n \in N$, $|x_n^{(k)}| \leqslant M$) et à valeurs dans K. Elles admettent dont toutes une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$). Il en va donc de même pour (x_n).

Théorème 7 – Théorème de Bolzano-Weierstrass
Soit u une suite bornée. Il existe $M > 0$ tel que tous les u_n appartiennent à $B_f(0, R)$. Cette boule est fermée et bornée. Comme E est de dimension finie, c'est un compact. Donc (u_n) admet une valeur d'adhérence // il existe une sous-suite convergente.

Propriété 21
Soit u une suite convergente d'éléments de F et ℓ sa limite.
Comme u converge, u est bornée. C'est une suite bornée de l'espace vectoriel F de dimension finie. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergente extraite de u, <u>convergeant dans F</u>. Or cette sous-suite converge vers ℓ. Donc $\ell \in F$.

Théorème 8
• Soit E est de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On munit E de $\|.\|_\infty$ pour cette base.
Pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p \in E$, on a $u(x) = x_1 u(e_1) + \cdots + x_p u(e_p)$.

$$\|u(x)\| \leqslant |x_1|.\|u(e_1)\| + \cdots + |x_p|.\|u(e_p)\| \leqslant k\|x\|$$

où $k = \|u(e_1)\| + \cdots + \|u(e_p)\|$.

• Démonstration uniquement pour 2 ensembles. Soient E_1, E_2 de dimension finie, et φ une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.
On prend $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1. On munit E_1 de $\|.\|_\infty$ pour cette base.
On prend $(f_1, \dots, f_q)$ une base de E_2. On munit E_2 de $\|.\|_\infty$ pour cette base.
Comme précédemment, on montre que $\|\varphi(x, y)\| \leqslant k\|x\|.\|y\|$ où $k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \|\varphi(e_i, f_j)\|$.

Propriété 22
Soit $f : E \to \mathbb{K}$ une fonction polynomiale. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, f est produits et combinaisons linéaires des formes linéaires coordonnées :

$$\pi_i : x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$$

et les π_i sont continues en tant qu'applications linéaires avec un espace de départ de dimension finie.

Propriété 23
On montre que la relation binaire $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexivité : a est relié avec lui-même par le chemin continu $\gamma : t \mapsto a$.

Symétrie : S'il existe un chemin continu γ joignant a et b, $t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin continu joignant b et a.

Transitivité : S'il existe un chemin continu γ_1 (resp. γ_2) joignant a et b (respectivement b et c), alors l'application

$$\gamma : t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t < 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \geqslant 1/2 \end{cases}$$

est un chemin continu (à vérfier !) joignant a et c.

Propriété 24
Soient $x, y \in A$, où A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, et $\gamma : [0, 1] \to A$ un chemin continu les reliant. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version réelle), l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. $\gamma([0, 1])$ est donc un intervalle de A qui contient x et y. Le segment $[x, y]$ est donc inclus dans A.
On reconnaît la définition d'un intervalle.