Suites et séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Suites de fonctions

1. Convergence simple, convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
2. Théorème de continuité. Théorème de double limite. Théorème d'interversion limite - intégrale sur un segment. Théorème d'interversion limite - dérivation. Extension pour la classe $\mathcal{C}^p$.

Séries de fonctions

3. Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale.
4. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et ses restes convergent uniformément vers 0.
5. La convergence normale implique la convergence uniforme : c'est pratique !
6. La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.
7. Adaptation des théorèmes : continuité, double limite, intégration terme à terme, dérivation terme à terme (et extension pour la classe $\mathcal{C}^p$).
8. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.

Approximation uniforme :

9. par des fonctions en escalier, pour une fonction continue par morceaux sur un segment,
10. par des fonctions polynomiales, pour une fonction continue sur un segment (théorème de Weierstrass).

Dans tout ce chapitre et sauf mention contraire, les fonctions étudiées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats seront, dans un chapitre ultérieur, étendus à des fonctions à valeurs dans F, espace vectoriel normé de dimension finie, ou même pour certaines propriétés, à des applications de E dans F, espaces vectoriels normés de dimension finie.

On rappelle que pour f fonction bornée sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

1 Suites de fonctions

1.1 modes de convergence

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1 – convergence simple

On dit que (f_n) *converge simplement* sur I vers la fonction f sur I si

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Il s'agit de calculer une limite en tout point x. On parle pour cette raison de convergence ponctuelle. La limite f ainsi obtenue est appelée *limite simple*.

Exercice 1 :

1. Étudier la convergence simple de (f_n) où $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0,1]$.

2. Étudier la convergence simple de (f_n) où $f_n(t) = (1 + \frac{t}{n})^n$ pour t réel.
3. Étudier la convergence simple de (f_n) où $f_n(t) = \arctan(nt)$ pour t réel.
4. La continuité est-elle conservée par convergence simple ?

Définition 2 – convergence uniforme

On dit que (f_n) *converge uniformément* sur I vers la fonction f sur I si à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \qquad \text{soit encore} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

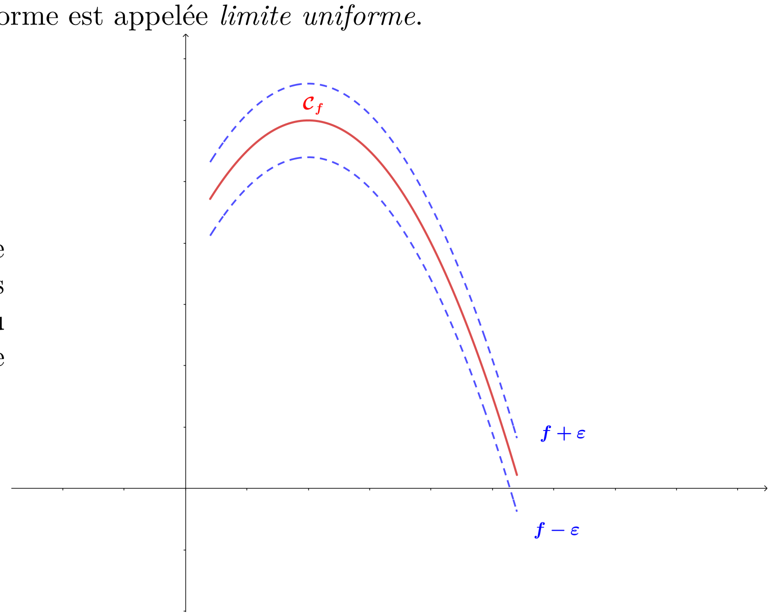
Avec des ε,

— la convergence simple de (f_n) vers f est :

— la convergence uniforme de (f_n) vers f est :

La limite f au sens de la convergence uniforme est appelée *limite uniforme*.

Graphiquement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les graphes des fonctions f_n sont dans la « bande » du plan comprise entre le graphe de $f - \varepsilon$ et le graphe de $f + \varepsilon$.



Théorème 1

La convergence uniforme entraîne la convergence simple : si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors elle converge simplement vers f sur I.
La réciproque est fausse.

Il s'ensuit que la limite uniforme d'une suite de fonctions, si elle existe, est unique, définie pour $x \in I$ par : $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Méthode – Montrer une convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions dont on souhaite montrer qu'elle converge uniformément sur I.

1. On étudie d'abord la convergence simple. Cela se fait par calcul de limite, pour $x \in I$, de $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. Ça nous donne $f(x)$.
2. Il s'agit ensuite de montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut y arriver :
   — en établissant le tableau de variations de la fonction $|f_n - f|$
   — par théorème d'encadrement, si on trouvé $\|f - f_n\|_\infty \leqslant a_n$ avec $\lim a_n = 0$.

Méthode – Montrer qu'une suite ne converge pas uniformément

Différentes méthodes permettent de justifier qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément. Par exemple :

— la non-convergence simple

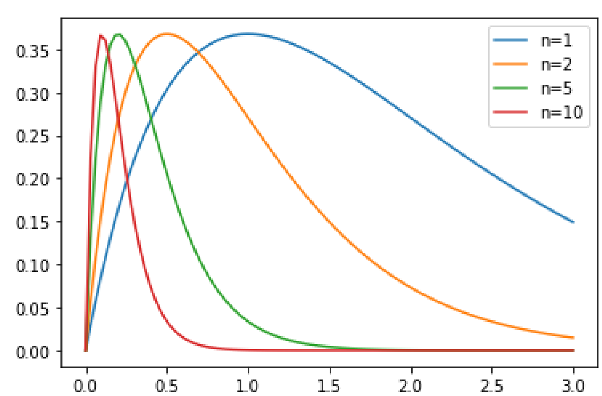
— le non-respect des théorèmes de continuité et de double limite énoncés dans les paragraphes suivants

— l'existence d'une suite (u_n) telle que $|f_n(u_n) - f(u_n)|$ ne tend pas vers 0, ce qui contredit $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Exercice 2 :

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : t \mapsto t^2 e^{-nt}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : t \mapsto \frac{n+t^2}{n(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, n] \\ t - n & \text{si } t \in]n, n+1[\\ n + 2 - t & \text{si } t \in [n+1, n+2] \\ 0 & \text{si } t > n+2 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^+$ (faire un graphe).
4. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$ sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto \frac{x + \sqrt{n}}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 : Étudier la convergence uniforme de (f_n) où $f_n : x \mapsto nxe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $]0, +\infty[$.



1.2 convergence uniforme, continuité et double limite

Propriété 1 – transmission de la continuité par convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.
En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur I est continue sur I.

Ce théorème est un *théorème d'interversion de limites*. Il montre qu'en cas de convergence uniforme sur I, pour $a \in I$,

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Nous disposons d'un théorème plus général (admis, conformément au programme).

Théorème 2 – théorème de la double limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur I et soit a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors ℓ_n admet une limite ℓ et f admet une limite en a, et ces deux limites sont égales, ce qui correspond à l'inversion de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

— Ce théorème étend le théorème d'inversion de limites pour la continuité au cas où a est seulement adhérent à I ou $a = \pm\infty$, en garantissant l'existence d'une limite. Rappelons que a est situé dans l'adhérence de I si pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap I \neq \emptyset$, ou encore s'il existe une suite d'éléments de I convergeant vers a. Par exemple, 1 est adhérent à $[0, 1[$.

— Voici une illustration pour aider à retenir.

$$\begin{array}{ccc}
f_n(x) & \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVU / hypothèse}} & f(x) \\
{\scriptstyle x \to a \atop \text{hypothèse}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to a \atop \text{THÉORÈME}} \\
\ell_n & \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{THÉORÈME}} & \ell
\end{array}$$

1.3 convergence uniforme et intégration sur un segment

Théorème 3 – interversion limite - intégrale

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$. On a l'interversion limite - intégrale :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 : En utilisant le théorème précédent, montrer que la suite de fonctions (f_n) suivante ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

$$f_n(x) = n^2(1-x)x^n$$

Théorème 4 – interversion limite - primitive

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément vers f sur tout segment de I. Soit $a \in I$. On note F_n et F les primitives respectives de f_n et f sur I s'annulant en a :

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

1.4 convergence uniforme et dérivation

Théorème 5 – interversion limite - dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

- (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
- (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur tout segment de I,

alors

- (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $f' = g$.

Il s'agit là encore d'un théorème d'interversion : $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$.

L'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite (f_n') et non (f_n).

Remarque : si une suite de fonctions converge uniformément sur J, elle converge uniformément sur toute partie de J. Aussi, pour établir une convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$, nous montrerons la convergence uniforme sur tout segment de la forme $[-a,a]$ et cela suffira.

Corollaire 1

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I
- $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors

- la limite simple f de (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$ sur tout segment de I.

2 Séries de fonctions

Comme précédemment, (f_n) est une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 3

La série de terme général f_n, notée $\sum f_n$, désigne la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

2.1 modes de convergence

Définition 4

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge simplement (respectivement uniformément) sur I. On note dans ce cas $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ la fonction $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Et on peut considérer la fonction reste de rang n, $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Remarques :

— Si la série $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

— Si la série $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Propriété 2

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si :

- la série converge simplement sur I,
- la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Exercice 5 :

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum f_n(x)$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple de $\sum f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.
   Soit I l'ensemble des réels x pour lesquels $\sum f_n(x)$ converge simplement. La somme de cette série est $\zeta(x)$ pour $x \in I$. Y a-t-il convergence uniforme sur I ? Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.
3. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Définition 5 – convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque :

— les fonctions f_n sont toutes bornées sur I,

— la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Méthode – justifier une convergence normale

En pratique, pour justifier que $\sum f_n$ converge normalement, on cherchera souvent une majoration de la forme :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant a_n \qquad \text{avec } \sum a_n \text{ série convergente}$$

Exercice 6 : Montrer que $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6

Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

C'est pratique ! Pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on commence donc par examiner la convergence normale.

$$\boxed{\text{Convergence normale}} \Rightarrow \boxed{\text{Convergence uniforme}} \Rightarrow \boxed{\text{Convergence simple}}$$

2.2 théorèmes d'inversion

Dans cette section, nous adaptons aux séries de fonctions tous les théorèmes établis pour les suites de fonctions.

Théorème 7 – transmission de continuité

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément sur I et soit $a \in I$.
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.
Ainsi, si une série de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, sa somme est également continue sur I.

La convergence uniforme sur tout segment inclus dans I assure la continuité sur tout segment inclus dans I, donc la continuité en tout point de I, donc la continuité sur I.

Exercice 7 : Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

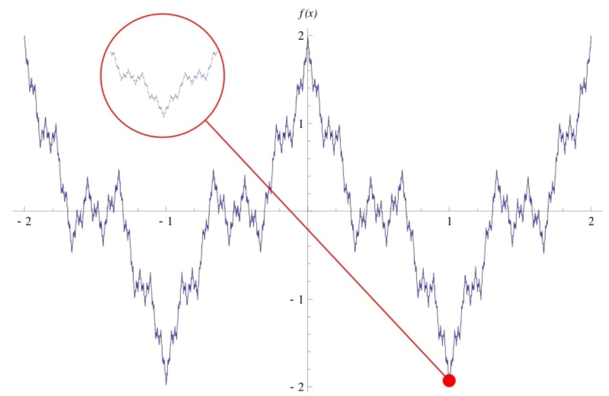
Exercice 8 : Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$ mais qu'il y a convergence normale sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$. Qu'en déduit-on pour S ?

Exercice 9 : Soit $f_n(x) = \dfrac{\cos(3^n \pi x)}{2^n}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $W : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. C'est la fonction de Weierstrass, historiquement le premier exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part.

Source et graphe : wikipédia.



Théorème 8 – interversion somme - limite

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite finie ℓ_n en a point adhérent à I ou $a = \pm\infty$, alors la série $\sum \ell_n$ converge et :

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Exercice 10 : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$.

Théorème 9 – intégration terme à terme

Supposons que les f_n sont continues sur $[a, b]$.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum \int\limits_a^b f_n$ converge et on a l'interversion :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

Théorème 10 – dérivation terme à terme

Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si :

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a l'interversion :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

De plus, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Théorème 11 – dérivation terme à terme (généralisation)

Supposons que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I (où $p \geqslant 1$). Si :

- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et on a l'interversion :

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Méthode – montrer qu'une somme de série est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Pour montrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on peut chercher à montrer que :

- toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I,
- toutes les séries $\sum f_n^{(p)}$ convergent uniformément sur tout segment de I pour $p \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas, on a l'interversion :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

3 Deux applications classiques

3.1 la fonction exponentielle

Nous allons ici démontrer que pour tout réel x, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. On s'interdit donc d'utiliser ce résultat.

Exercice 11 :

1. Montrer que pour x réel, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge. On pose
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. Calculer par ailleurs $f(0)$. En déduire que $f = \exp$.

3.2 la fonction zêta de Riemann

✎ Exercice 12 : Pour $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]1, +\infty[$.
2. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Étudier ses variations et sa convexité.
3. Donner la limite de ζ en $+\infty$.
4. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner la limite et un équivalent de ζ en 1.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de ζ.

4 Approximation uniforme

4.1 approximation par des fonctions en escalier

Révisions :

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,
  - $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
  - $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

  La subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ est dite adaptée à f.
- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Propriété 3

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f.
« Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ ».

4.2 approximation par des fonctions polynomiales

Le théorème suivant est admis, conformément au programme.

Théorème 12 – Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 13 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

5 Brève extension à un espace vectoriel normé de dimension finie (chapitres ultérieurs)

- Suites et séries de fonctions. Les différents modes de convergence et les propriétés rencontrées resteront valables dans le cas où $f_n : I \to F$, ou même, pour le théorème de double-limite et la transmission de continuité, pour $f_n : A \to F$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et F est un espace vectoriel normé de dimension finie.
  Il nous faudra notamment pour cela définir « $\lim\limits_{x \to a}$ » quand x et a sont dans un espace vectoriel de dimension finie.
- La propriété d'approximation uniforme par des fonctions en escalier s'étendra à $f : [a, b] \to F$, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et F espace vectoriel normé de dimension finie.

6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Théorème 1

Facile justement avec les epsilon qu'on vient de visualiser.
Contre-exemple illustrant que la réciproque est fausse : $f_n(t) = t^n$ sur $[0,1]$. On a vu que (f_n) converge simplement vers f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a $\|f_n - f\|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0. Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Propriété 1

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Il s'agit alors de majorer chacun de ces trois termes. Par convergence uniforme de la suite (f_n), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. On considère un tel entier n.

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_\infty \leqslant |f_n(x) - f_n(a)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Comme enfin f_n est continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a ainsi montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - a| < \alpha$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Remarque : il est possible de justifier la continuité de la limite même s'il n'y a pas convergence uniforme sur I tout entier, mais seulement au voisinage de chaque point de I. La continuité est en effet une propriété locale. Il est souvent judicieux de travailler sur un segment (et plus généralement sur un compact).

Théorème 3

Puisque (f_n) converge uniformément et que les f_n sont continues sur $[a,b]$, la fonction $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a,b]$, et l'intégrale $\int_a^b f$ existe. Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leqslant \int_a^b |f - f_n| \leqslant (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

On conclut avec le théorème d'encadrement.

Remarque : Ce théorème repose sur la convergence uniforme et ne nécessite aucune domination. En revanche, contrairement au théorème de convergence dominée, il ne s'applique que sur un segment.

Théorème 4

Soit $[\alpha;\beta]$ un segment de I. Quitte à agrandir ce segment, on peut supposer que $a \in [\alpha;\beta]$.
Cas où $x > a$

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant (x-a)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]} \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]}$$

Cas où $x \leqslant a$: semblable. Ainsi

$$\|F_n - F\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \leqslant (\beta - \alpha)\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]}$$

et on termine avec le théorème d'encadrement.

Théorème 5

Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \int_{x_0}^x f_n'(t) \, \mathrm{d}t + f_n(x_0)$.

- Par convergence uniforme de f_n' vers g, et théorème d'inversion relatif aux primitives, $\left(x \mapsto \int_{x_0}^x f_n'(t) \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \int_{x_0}^x g(t) \, \mathrm{d}t$ sur tout segment de I.

En passant à la limite (simple) dans l'égalité de départ, il vient :

$$\forall x \in I, \ f(x) = \int_{x_0}^x g(t) \, \mathrm{d}t + f(x_0)$$

La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme sur tout segment de I de fonctions continues, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

- Il ne reste plus qu'à montrer la convergence uniforme sur tout segment de I de (f_n) vers f, qui découle de celle de (h_n) vers h avec $h_n : x \mapsto f_n(x) - f_n(x_0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Pour tout segment S inclus dans I, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in S,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant |h_n(x) - h(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\infty,S} \leqslant \|h_n - h\|_{\infty,S} + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

On termine avec le théorème d'encadrement.

Le corollaire 1 consisterait en une récurrence. On le passe.

Propriété 2

L'hypothèse de convergence simple permet de définir le reste de la série au rang n, noté R_n, et aussi $S = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
Comme on a $R_n = S - S_n$, on a $\|R_n\|_\infty = \|S - S_n\|_\infty$, et dès lors la convergence uniforme de (S_n) équivaut à celle de (R_n) vers 0.

Théorème 6

Supposons que $\sum f_n$ converge normalement.
- Pour $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge. Et donc $\sum f_n$ converge simplement.
- Par croissance de la somme de séries convergentes,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.

Donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. On en déduit que la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle.
Par ces deux points, $\sum f_n$ converge uniformément.

La réciproque est fausse : on a vu que $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ convergeait uniformément sur $[0,1]$. Cependant, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

Propriété 3

On effectue la démonstration uniquement dans le cas où f est continue sur $[a,b]$.
D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [a,b],\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Construisons une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.
- Choisissons d'abord une bonne subdivision. Soit $n \in N^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \alpha$. On pose, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
- Notons alors φ la fonction définie sur $[a,b]$ par $\varphi(b) = f(b)$ et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et $x \in [x_i, x_{i+1}[$, $\varphi(x) = f(x_i)$.

φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.
- Montrons que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Soit $x \in [a,b]$. Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}[$.

$$|x - x_i| < x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} < \alpha \text{ donc } |f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Ainsi, $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.

Il suffit maintenant de construire une suite de fonctions en escalier en considérant pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction φ_p précédemment construite pour $\varepsilon = \frac{1}{p+1}$.
On a ainsi trouvé une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f (car $\|f - \varphi_p\|_\infty < \frac{1}{p+1}$ et théorème d'encadrement).