Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.
La notion d'ouvert sera approfondie au chapitre Topologie. Il nous suffit de savoir pour l'instant que si $\mathcal{U}$ est un ouvert, pour $a \in \mathcal{U}$, pour $v \in E$, pour t réel suffisamment proche de 0, on a $a + tv \in \mathcal{U}$.
Par exemple, $]0, +\infty[$, $]-3, 6[\cup]7, 8[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. $]0, +\infty[\times]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1. Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v. Dérivées partielles dans une base.

Différentielle

2. Application différentiable au point a. Développement limité à l'ordre 1.
3. Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
4. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.
5. Différentielle de f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a) \cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.
6. Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Cas particuliers : application constante, application linéaire, fonction d'une variable réelle dérivable : $f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$.
7. Lien entre différentielle et dérivées partielles.
8. Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.
9. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire u selon lequel la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ de f en a est maximale.

Opérations sur les applications différentiables

10. Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1, \dots, f_p$ sont des applications différentiables.
11. Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.
12. Dérivée le long d'un arc. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.
13. Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.
Dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$.

Applications de classe $\mathcal{C}^1$

14. Définition de la classe $\mathcal{C}^1$ et théorème de caractérisation de la classe $\mathcal{C}^1$ à l'aide des dérivées partielles.
15. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.
16. Formule d'intégration le long d'un arc.
17. Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

18. Ensemble des vecteurs tangents en un point à un partie. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
19. Théorème d'obtention de $T_x X$ lorsque $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$

20. Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Classe $\mathcal{C}^k$.
21. Théorème de Schwarz.
22. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
23. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.
24. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

---

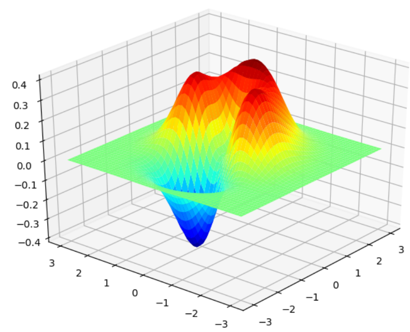
1 Introduction avec les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Dans cette première partie d'introduction, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.

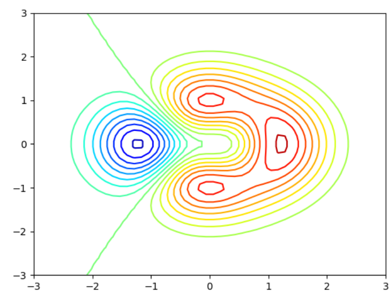
1.1 visualisation

Le graphe de f est l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.
La courbe de niveau m, où m est un réel fixé, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $f(x, y) = m$.

Surface



courbes de niveaux



Carte IGN

On peut utiliser Python, ayant déjà défini f.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
n = 50
x = np.linspace (-2,2,n)
y = np.linspace (-2,2,n)
X,Y = np.meshgrid (x,y)
Z = f(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d", elev = 23, azim = -133)
ax.set_position([0, 0, 0.95, 1])
ax.plot_surface (X , Y , Z ) # Surface
plt.contour(X,Y,Z,levels=16,cmap=cm.jet) # Lignes de niveaux
plt.show()
```

1.2 limites et continuité

Dans $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x_0, y_0)$ si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ tend vers 0. Dans ce cas, $x \to x_0$ et $y \to y_0$. Il faut cependant faire attention à ne pas se retrouver avec des double-limites.

Exercice 1 : (B.E.O. numéro 57) Montrer que l'application suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 2$. g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier en $(0, 0)$. Nous visualisons plusieurs approches possibles de $(0, 0, 3)$ sur la surface.
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

1.3 dérivées directionnelles et dérivées partielles d'ordre 1

Définition 1 – dérivée directionnelle

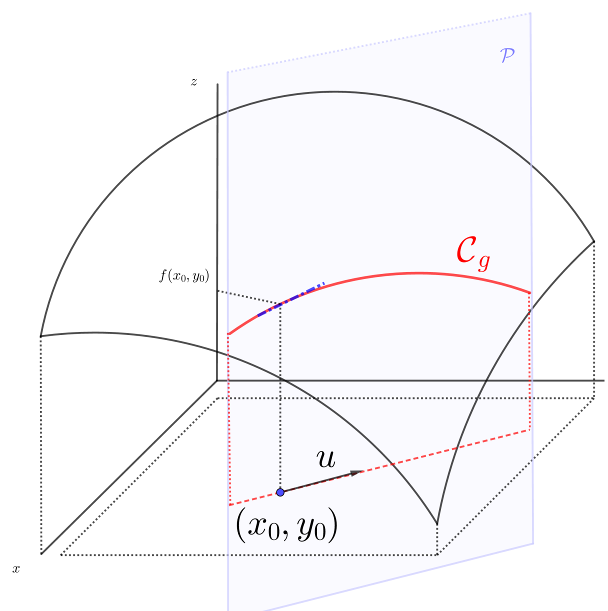
Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est dérivable en $a = (x_0, y_0)$ suivant la direction u si la fonction g à une variable :

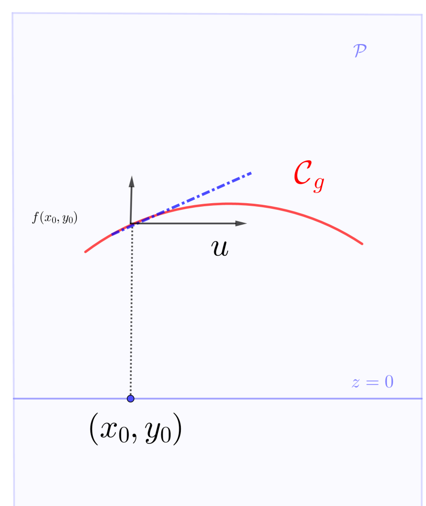
$$g : t \mapsto f(a + tu)$$

est dérivable en 0. La dérivée directionnelle de f en a selon la direction u est alors :

$$\mathrm{D}_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Pour pouvoir interpréter le nombre dérivé comme une pente, comme on en a l'habitude, il faut considérer un vecteur u de norme 1.





Définition 2 – dérivées partielles

Les dérivées partielles sont les dérivées directionnelles de f dans les directions $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Autrement dit, ce sont, si elles existent et sont finies, les quantités :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

On les note aussi $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 f(x_0, y_0)$.
Le vecteur *gradient* de f en (x_0, y_0) est $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Exercice 3 : Donner le gradient de $f : (x, y) \mapsto e^x e^{3y} + 2x^2y^3$ en $(-1, 1)$.

Définition - propriété 1

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles sur U et que celles-ci sont continues sur U.
- Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- On a les propriétés usuelles de classe $\mathcal{C}^1$, et de calcul des dérivées partielles, pour $\lambda f + \mu g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $\varphi \circ f$ avec φ fonction de $f(U)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Justifier que $f : (x, y) \mapsto e^x \ln(y) + xy^7$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

Remarque sur les dérivées partielles

- Une fonction d'une variable admet une seule dérivée. On la note f' en général. Si on choisit de noter x la variable de la fonction, on peut noter $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Une fois ce choix effectué, il n'est plus possible de changer. On ne peut plus faire intervenir $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, par exemple.
- Une fonction de deux variables admet seulement deux dérivées partielles : $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$. En général, on choisit de considérer f comme fonction des variables x et y, et on peut alors considérer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On peut parfois initialement choisir les lettres u et v pour les variables de f. Dans ce cas, on peut noter $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$. Mais une fois les deux lettres choisies, on s'y tient. Nous verrons page 6 l'importance d'avoir les idées claires à ce sujet.

1.4 formule de Taylor-Young à l'ordre 1, plan tangent, différentielle

Le vocabulaire de ce paragraphe sera rigoureusement introduit plus loin dans le chapitre. Nous nous habituons progressivement aux notions.

Propriété 1 – formule de Taylor-Young (admis)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, f admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0), unique et donné par

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0) | (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

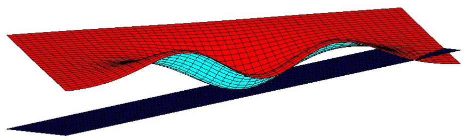
$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|) \\ f(x, y) &\underset{(x_0,y_0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \end{aligned}$$

Définition 3

Dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est un plan ; il s'agit du **plan tangent à la surface de f en** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Exercice 5 : Soit $f(x,y) = \ln(2x+y)$. Donner le gradient en $a = (-1, 3)$ et l'équation du plan tangent à la surface en a.

Définition 4

L'application

$$L : (h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

est une application linéaire. On l'appelle *différentielle de f en* (x_0, y_0) et on la note $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$. Pour v vecteur de $\mathbb{R}^2$ (ici, $v = (h,k)$), on remarque que

$$\boxed{\mathrm{d}f(x_0, y_0)(v) = \langle \nabla f(x_0, y_0) | v \rangle}$$

L'application :

$$\mathrm{d}f : \begin{pmatrix} U & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (x_0, y_0) & \mapsto & \mathrm{d}f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est appelée *différentielle de f*.

Dans l'approche de Leibniz, la différentielle d'une fonction est son *accroissement infinitésimal*, qui s'écrit comme une combinaison des accroissements infinitésimaux des différentes variables. Ainsi pour une fonction f des variables x et y, l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}f$ s'exprime sous la forme :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathrm{d}y$$

Cette approche est toujours d'actualité en physique et en économie.

Leibniz, 1646-1716, mathématicien, physicien, philosophe allemand

1.5 règle de la chaîne

Théorème 1 – dérivées partielles et composition

- **Règle de la chaîne**

  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : \begin{pmatrix} I & \to & U \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

  Alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

  $$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))$$

- Considérons trois fonctions f, φ, ψ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que

  $$H : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{pmatrix}$$

  H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ses deux dérivées partielles sont données par

  $$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y).\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y).\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y).\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{aligned}$$

Exercice 6 :

1. Calculer $g'(t)$ où $g(t) = f(4t+1, -3t+1)$ et calculer $h'(x)$ où $h(x) = f(x,x)$.
2. Calculer $\partial_1(H)(u,v)$ et $\partial_2(H)(u,v)$ pour $H(u,v) = f(u+v, u^2+v^2)$ puis $H(u,v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

Propriété 2 – interprétation géométrique du gradient

S'il n'est pas nul, le gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ est :

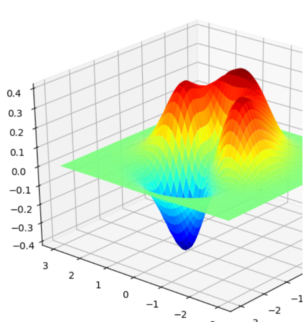
— de direction orthogonale à la courbe de niveau de f passant par a

— de sens orienté vers les courbes de niveaux supérieurs

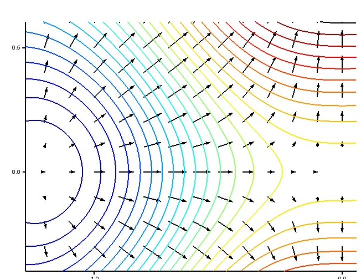
— de norme d'autant plus forte que les courbes de niveaux sont resserrées près de a.

De plus, il donne la direction « de plus forte pente » en a : $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire u selon lequel la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ de f en a est maximale.

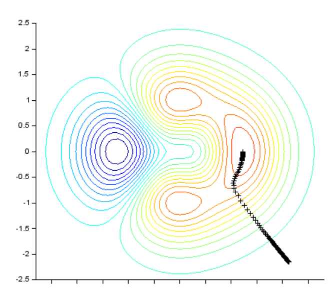
Surface



courbes de niveaux avec gradients



algorithme du gradient (H.P.)



1.6 dérivées partielles d'ordre 2

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U : $\partial^2_{1,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial^2_{2,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\partial^2_{1,1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\partial^2_{2,2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On stocke les résultats dans les matrices hessiennes $H_f(x,y)$ de f.

Théorème 2 – Théorème de Schwarz (admis)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, les matrices hessiennes de f sont des matrices symétriques. Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Exercice 7 : Donner la matrice hessienne en $(0, \frac{\pi}{2})$ de $f : (x,y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$.

Théorème 3 – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Pour tout $(x_0, y_0) \in U$,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right]$$
$$+o(h^2+k^2)$$

1.7 quelques exemples d'équations aux dérivées partielles

I et J désignent des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $U = I \times J$; les fonctions considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ pour des équations à l'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^2$ pour des équations à l'ordre 2.

- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(y)$.
- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = xC(y) + D(y)$.
- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(x) + D(y)$.

Exercice 8 : Résoudre (E) : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y$.

Exercice 9 : Chercher les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \; x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x &= u \\ y &= \frac{w}{u} \end{cases}$.

Exercice 10 : Résoudre (E) : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$ (équation des cordes) sur $\mathbb{R}^2$, où $c \neq 0$, en posant $\begin{cases} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{cases}$.

Cadre de travail jusqu'à la fin du chapitre

E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.
Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, pour tout $a \in \mathcal{U}$, pour $h \in E$ « suffisamment petit », $a + h$ appartient à $\mathcal{U}$.
E étant de dimension finie, E peut être muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.

F étant de dimension finie, F peut être muni d'une base $(e'_1, \dots, e'_p)$.
Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \underset{\text{identification}}{=} f(x_1, \dots, x_n)$$

Cette identification ne nous étonne d'ailleurs pas quand $E = \mathbb{R}^n$, ce qui sera souvent notre cadre de travail. Ceci explique que l'on parle de *fonctions de plusieurs variables*. Quand on veut donner un rôle particulier à chacune des variables, nous considérons les *applications partielles* :

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \text{ fixés}$$

Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$f(x) = f_1(x) e'_1 + f_2(x) e'_2 + \cdots + f_p(x) e'_p$$

Les fonctions $f_j : x \mapsto f_j(x)$ sont les *fonctions composantes*, à valeurs réelles.

Exercice 11 : Donner les applications partielles et les fonctions composantes (ou coordonnées) de f, où

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^4}, e^x y \cos(z) \right)$$

2 Différentiabilité

2.1 dérivée selon un vecteur

Définition 5

Soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$. Sous réserve d'existence, la *dérivée de f en a selon le vecteur v*, notée $\mathrm{D}_v f(a)$, est la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto f(a + tv)$.

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Exercice 12 : Calculer $\mathrm{D}_V f(A)$ pour $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$.

Définition 6 – dérivées partielles relatives à une base

Pour $(e_1, \dots, e_n)$ base de E et $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième dérivée partielle de f en a est la dérivée de f en a selon le vecteur e_i. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

Remarques :

— Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ les dérivées partielles.

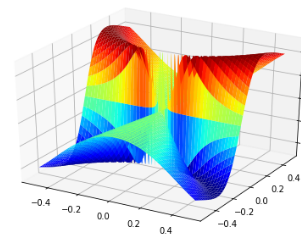
— Si $E = \mathbb{R}^n$ et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

— Dans la pratique, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en a_i de la i-ième application partielle. Sur un ouvert, il suffit de dériver chaque composante de la fonction avec x_i variable, les autres variables étant fixées. En un point, on revient aux dérivées directionnelles selon les vecteurs de base.

Exercice 13 :

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0$$

1. Montrer que f admet des dérivées en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v=(v_1,v_2)$ et calculer $\mathrm{D}_v f(0,0)$.
2. Donner en particulier ses deux dérivées partielles en $(0,0)$.
3. En considérant $f(x,x^2)$, montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.



Ainsi, l'existence de dérivées en a selon tout vecteur n'est pas une bonne condition de régularité en a de la fonction. C'est pourquoi nous introduisons la notion de différentiabilité.

2.2 différentielle en un point

Définition - propriété 2

On dit que f est *différentiable* en a, ou que f *admet un développement limité* à l'ordre 1 en a, s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Dans ce cas, une telle application L est unique. On l'appelle *différentielle* de f en a et on la note $\mathrm{d}f(a)$.

Exercice 14 : Dans le cas où E est un espace euclidien, montrer que $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en tout point de E, et calculer la différentielle en x.

— La différentielle de f en a s'appelle aussi *application linéaire tangente* de f en a.

— Lorsque $f=(f_1,\dots,f_p)$, f est différentiable en a si, et seulement si, toutes les fonctions composantes f_j le sont.

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et f admet une dérivée selon tout vecteur en a :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

et en particulier, si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans toute base de E, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$$

$$\forall h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Notation

⚠ La valeur en un vecteur h de E de l'application linéaire différentielle de f en a est souvent notée avec un point à la place d'une expression parenthésée.

$$\mathrm{d}f(a)(h) \underset{\text{notation}}{=} \mathrm{d}f(a)\cdot h$$

Je ne fais pas ce choix dans ce polycopié, mais sachez vous adapter.

Cas particuliers

- Si f est constante, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
- Si f est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une application linéaire, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = f$.
- Si f est une fonction de la variable réelle, f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a. Dans ce cas,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h \quad \text{et par linéarité de } \mathrm{d}f(a),\ f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

Définition 7 – différentiabilité – classe $\mathcal{C}^1$

- On dit que f est différentiable sur $\mathcal{U}$ si f est différentiable en tout point a de $\mathcal{U}$. On définit dans ce cas l'application différentielle, notée $\mathrm{d}f$, qui à a associe $\mathrm{d}f(a)$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Théorème 4 – classe $\mathcal{C}^1$ (admis)

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Méthode –montrer qu'une fonction est différentiable en a et obtenir sa différentielle

- Dans des exercices plus « algébriques », on réussit à « développer » $f(a+h)$ en $f(a)$ plus une partie linéaire en h plus une partie négligeable devant $\|h\|$. La partie linéaire en h est alors $\mathrm{d}f(a)$ (définition-propriété 2).
- Dans des exercices avec des fonctions réelles de variables réelles, pour étudier si une fonction f est différentiable en a, on peut :
  — voir directement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ (condition suffisante non nécessaire ; cette façon de faire est souvent valable face à des fonctions usuelles),
  — ou bien on commence par vérifier l'existence de dérivées partielles en a, puis on mène une analyse-synthèse.
  Dans l'analyse, si f est différentiable en a, alors

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

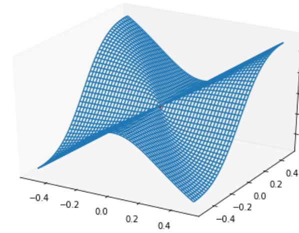
  Dans la synthèse, on étudie si l'application linéaire $L : h \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ satisfait

$$f(a+h) - f(a) - L(h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|)$$

Exercice 15 :

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0)=0$$

1. Montrer que f est différentiable en $(1,1)$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.



Définition 8

On munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$. Soit f une application différentiable en a, de composantes $f_1,\dots,f_p$. La matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces bases est la matrice de coefficients :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$$

Lorsque $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^p$, on l'appelle *matrice jacobienne* de f en a et on la note $J_f(a)$.

Exercice 16 : Donner la matrice jacobienne en (x,y,z) de $f:(x,y,z)\mapsto(e^x,xy^2z^3,xe^{yz},z+2)$ (on ne demande pas de montrer que f est différentiable, cela vient de sa classe $\mathcal{C}^1$).

Remarque sur la notation différentielle pour la physique (H.P.) ; cas d'une forme différentielle totale exacte

On munit E d'une base $(e_1,\dots,e_n)$. Pour tout i compris entre 1 et n, l'application $\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke_k\mapsto x_i$ est linéaire. Elle est donc égale à sa différentielle en tout point. C'est l'une des raisons pour laquelle elle est notée « $\mathrm{d}x_i$ ». Il s'ensuit quelques « simplifications » :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(a)(h) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i(h)\\
\mathrm{d}f(a) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i\\
\mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i
\end{aligned}$$

Et c'est ainsi que vous verrez par exemple, à partir de $PV=nRT$, $\frac{\mathrm{d}P}{P}+\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}T}{T}$.

2.3 gradient (cas où E est euclidien et $F=\mathbb{R}$)

Ici E est un espace euclidien, et $f:\mathcal{U}\subset E\to\mathbb{R}$.

Propriété 3

Si f est différentiable en $a\in\mathcal{U}$, on appelle *gradient* de f en a, et on note $\nabla f(a)$, l'unique vecteur v de E qui vérifie :

$$\forall h\in E,\ \mathrm{d}f(a)(h)=\langle v|h\rangle$$

Ainsi

$$\forall h\in E,\ \mathrm{d}f(a)(h)=\langle\nabla f(a)|h\rangle$$

Propriété 4

Dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, on a :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

3 Opérations sur les applications différentiables

Les différentiabilités suivantes peuvent être énoncées en a. Je vous laisse adapter. Tous les résultats peuvent s'énoncer pour la classe $\mathcal{C}^1$. Je vous laisse adapter là encore.

Propriété 5

Si f et g sont différentiables sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$

Propriété 6 – multilinéarité

Tous les espaces vectoriels en jeu sont de dimension finie.

- Si f et g sont différentiables et B est une application bilinéaire, alors $B(f, g)$ est différentiable et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[B(f,g)] &= B(\mathrm{d}f, g) + B(f, \mathrm{d}g) \\ \mathrm{d}[B(f,g)](a)(h) &= B(\mathrm{d}f(a)(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a)(h)) \end{aligned}$$

- Plus généralement, si $f_1, \ldots, f_r$ sont différentiables et que M est une application multilinéaire, alors $M(f_1, \ldots, f_r)$ est différentiable et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[M(f_1, \ldots, f_r)] &= M(\mathrm{d}f_1, f_2, \ldots, f_r) + M(f_1, \mathrm{d}f_2, \ldots, f_r) + \cdots + M(f_1, \ldots, f_{r-1}, \mathrm{d}f_r) \\ \mathrm{d}[M(f_1, \ldots, f_r)](a)(h) &= M(\mathrm{d}f_1(a)(h), f_2(a), \ldots, f_r(a)) + \cdots + M(f_1(a), \ldots, f_{r-1}(a), \mathrm{d}f_r(a)(h)) \end{aligned}$$

Pour f et g différentiables à valeurs dans une algèbre ($\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...), fg est différentiable et

$$\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g)$$

Exercice 17 : Pour f et g endomorphismes d'un espace euclidien, on définit $\Psi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Calculer $\mathrm{d}\Psi(a)(h)$ pour $h \in E$ de deux façons.

Propriété 7 – règle de la chaîne

Soient $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : \mathcal{V} \to G$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Au niveau des matrices jacobiennes, nous avons simplement

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

Exercice 18 : En effectuant le produit des matrices jacobiennes ci-dessus, qu'obtient-on comme formule en termes de dérivées partielles ?

En particulier, si $h(u_1, \ldots, u_n) = g(f_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_p(u_1, \ldots, u_n))$, on a accès aux dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u_i}$ par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial g}{\partial x_j}(f_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_p(u_1, \ldots, u_n))$$

Propriété 8 – règle de la chaîne pour la dérivation le long d'un arc

On rappelle que le nom *arc* est donné à toute application γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel E. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ et $t \in I$.

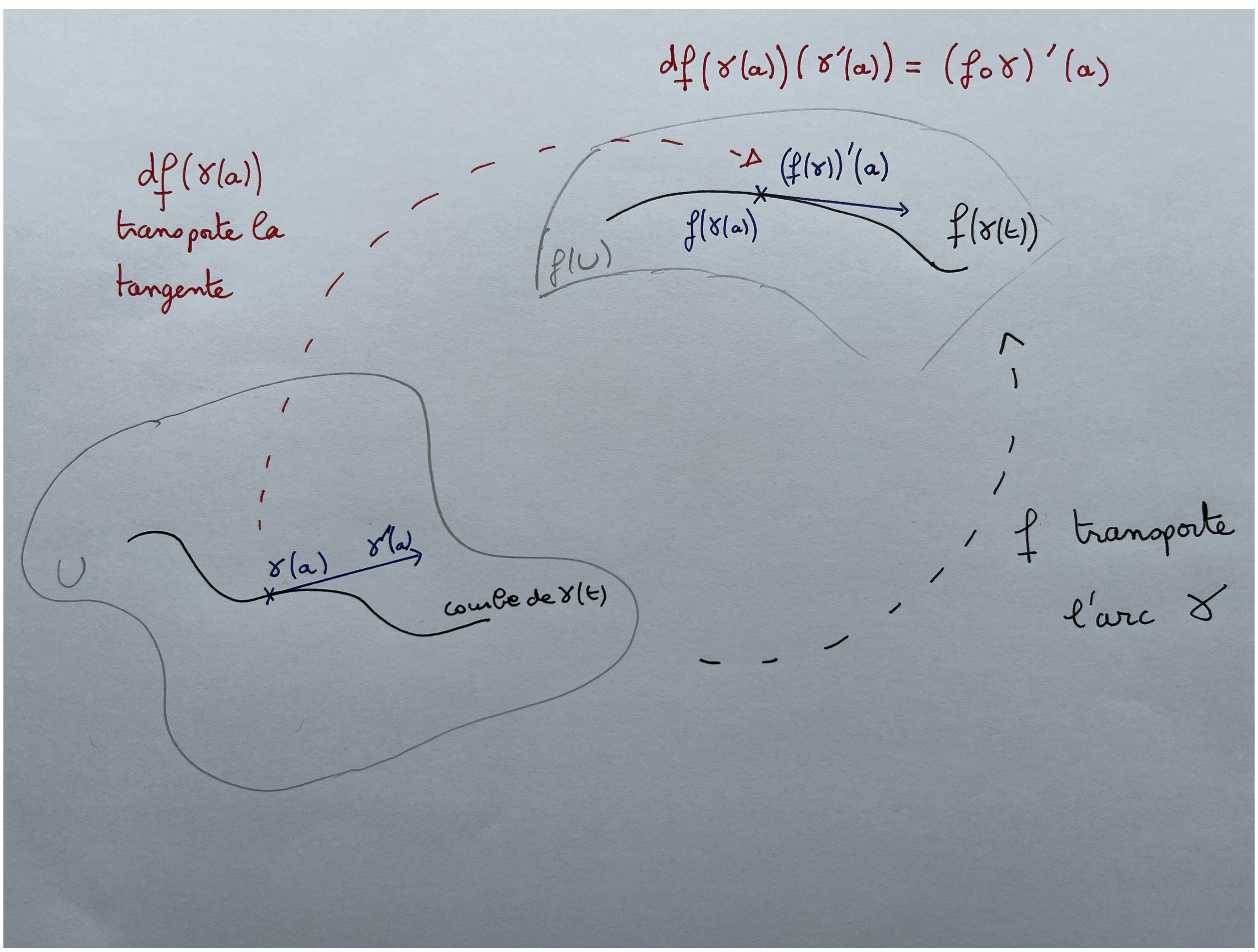
- Si γ est dérivable en t et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ et on a plus simplement :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

Exercice 19 : Calculer $g'(t)$, où $g(t) = f(t, t^2, t^3 - t^4, e^{-t})$.



4 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

4.1 la classe $\mathcal{C}^1$

Les opérations algébriques usuelles sont valables : combinaison linéaire, produit lorsqu'il s'agit de fonctions réelles, et composées lorsqu'il s'agit de fonctions réelles. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On peut rédiger la classe $\mathcal{C}^1$ de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ à l'aide de fonctions polynomiales suivies de fonctions usuelles.

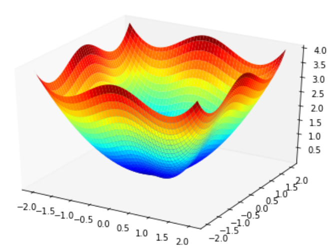
> Par exemple, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto e^x \ln(y^2 + z^2 + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
> $(x, y, z) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ (ATTENTION !) dans $\mathbb{R}$ et exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $(x, y, z) \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
> $(x, y, z) \mapsto y^2 + z^2 + 1$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et ln est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $(x, y, z) \mapsto \ln(y^2 + z^2 + 1)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Méthode – montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

Pour démontrer que $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
- si ceux-ci ne s'appliquent pas (ou pas sur $\mathcal{U}$ entier), on peut chercher à montrer que les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Exercice 20 :



$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0, 0) = 0$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété 9 – intégration le long d'un arc

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

Propriété 10

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe par arcs.
La fonction f est constante sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, f est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

4.2 les classes $\mathcal{C}^k$

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles. Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{j_k}(\partial_{j_{k-1}}(\dots(\partial_{j_1} f)))$ est la dérivée partielle selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$, et on la note $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$. Quand on dérive f k fois, on parle de dérivées partielles d'ordre k. Une application est de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles

d'ordre k existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
On a les opérations algébriques habituelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, composition, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^k$.
Lorsque f est à valeurs réelles, ses dérivées partielles d'ordre 2 sont stockées dans la matrice hessienne :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Théorème 5 – Théorème de Schwarz (admis)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, les matrices hessiennes de f sont des matrices symétriques.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Théorème 6 – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis)

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. On a

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

soit aussi

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h | h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Nous utiliserons cette propriété dans le chapitre Optimisation.

5 Tangence et orthogonalité

5.1 ensemble des vecteurs tangents à une partie en un point

Définition 9

Soit X une partie de E et x un point de X.
Les vecteurs tangents à X en x sont les dérivées en 0 des arcs tracés sur X, définis au voisinage de 0, passant par x en 0 et dérivables en 0.
Présenté autrement : un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.
On note $T_x X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Il ne faut pas croire que $T_x X$ est un espace vectoriel, mais quand ça l'est, on parle d'espace tangent.

Remarques :

- Le vecteur nul est tangent à X en tous les points de X.

  Soit $x \in X$. On prend $\gamma : t \mapsto$

On a $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = 0$.

- Si $x \in \mathring{X}$, tout vecteur de E est tangent à X en x.

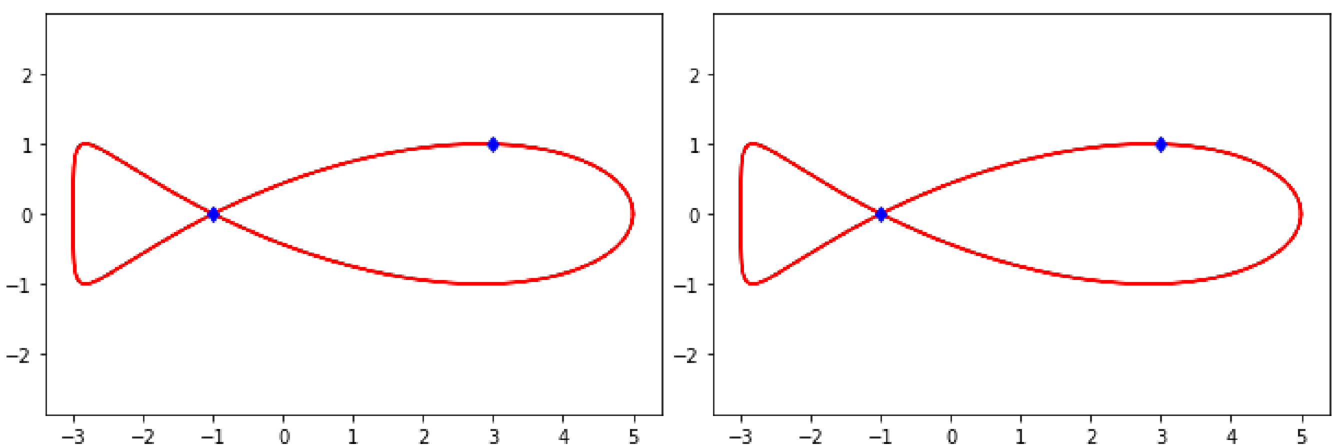
  Soit $x \in \mathring{X}$ et soit $v \in E$. Pour t assez petit, $x+tv \in X$. On prend $\gamma : t \mapsto$

  On a $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

  Illustration.

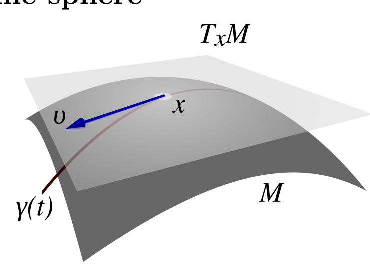
Exercice 21 : On considère X égal au tracé du poisson ci-dessous (source : mathcurve.com).

1. Sans démonstration, représenter graphiquement T_aX, où $a = (3, 1)$.
2. Sans démonstration, représenter graphiquement T_bX, où $b = (-1, 0)$. On constate que T_bX n'est pas un espace vectoriel.



5.2 Exemples d'ensembles T_xX

Exercice 22 (au programme) : **Exemple des vecteurs tangents à une sphère**



E est un espace euclidien et S est la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. On va montrer par double-inclusion que pour $a \in S$,

$$T_aS = \{a\}^{\perp} = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$$

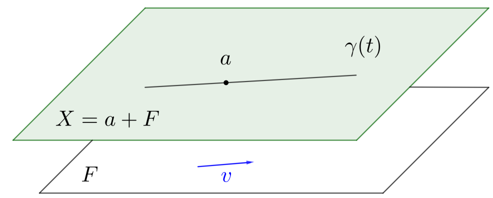
1. Résultat préliminaire, qu'on peut passer en première lecture. Montrer que si $v \in T_xX$, alors pour tout λ réel, $\lambda v \in T_xX$.
2. Montrer que $T_aS \subset (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$.
3. Réciproquement, soit $v \neq 0$ tel que $\langle a, v\rangle = 0$. En considérant

$$\gamma : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \cos(t)a + r\sin(t)\frac{v}{\|v\|} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\frac{r}{\|v\|}v \in T_a S$. En utilisant le préliminaire, on a $v \in T_a S$.

Exercice 23 (au programme) : **Exemple des vecteurs tangents à un sous-espace affine**
On considère le sous-espace affine $X = a + F$, avec $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E. On va montrer par double-inclusion que pour $x \in X$, $T_x X = F$.

1. Montrer que $F \subset T_x X$.
2. (avec aide) Montrer que $T_x X \subset F$.



Propriété 11

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.
On note S son graphe, $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathcal{U}\}$.
L'ensemble $T_{M_0} S$ des vecteurs tangents à S en $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est un plan vectoriel P.
Le plan affine $M_0 + P$ est appelé *plan tangent à la surface en* (x_0, y_0) et a pour équation

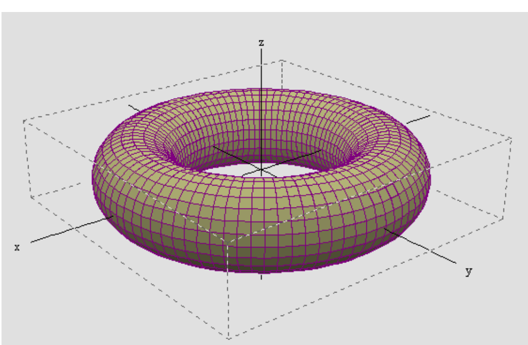
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

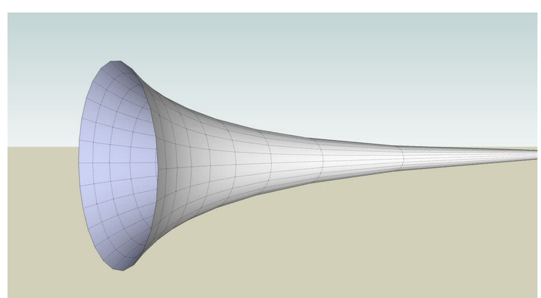
5.3 le cas des ensembles X définis par une équation

La description d'une surface de $\mathbb{R}^3$ par une équation de la forme $z = f(x, y)$ ne permet de décrire qu'un nombre restreint de surfaces de l'espace. Allez faire un tour sur le site `mathcurve.com`, rubrique surfaces, pour vous en convaincre !
On définit plus généralement une surface de $\mathbb{R}^3$ par la donnée d'une équation implicite $g(x, y, z) = 0$. Il n'est pas toujours possible d'exprimer z en fonction de x et y pour se ramener au cas de la propriété 11.
À titre d'exemple, vous avez ci-dessous un tore « chambre à air » d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

et la trompette de Gabriel, d'équation $(x^2 + y^2)z^2 = a^4$.

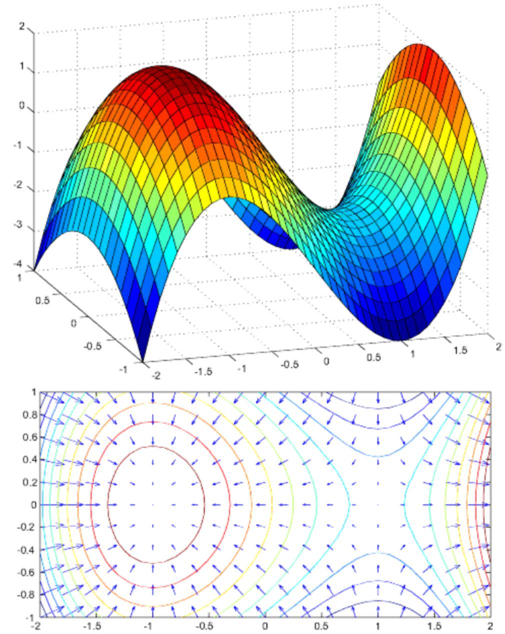




Le théorème suivant permet de contourner cette difficulté pour déterminer les espaces tangents pour de telles surfaces. Sa démonstration (en partie hors-programme) fait appel au théorème des fonctions implicites, précisant les conditions pour exprimer localement z comme une fonction de x et y.

> **Théorème 7**
>
> Soit $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X = \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\}$. Pour $a \in X$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, on a
>
> $$T_a X = \ker \mathrm{d}g(a) = (\nabla g(a))^\perp$$

Dans le cas de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ce résultat permet de montrer que le gradient est orthogonal aux courbes de niveaux. Illustration :



6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Théorème 1 - Règle de la chaîne

$$\begin{array}{rcl} f\circ\gamma(t+h)-f\circ\gamma(t) & = & f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t)) \\ & \underset{h\to 0}{=} & f(x(t)+\underbrace{hx'(t)+o(h)}_{hbis},y(t)+\underbrace{hy'(t)+o(h)}_{k})-f(x(t),y(t)) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \langle\nabla f(x(t),y(t))|(hbis,k)\rangle+o(\sqrt{hbis^2+k^2}) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \langle\nabla f(x(t),y(t))|(x'(t),y'(t))\rangle h+o(h)+o(\sqrt{hbis^2+k^2}) \\ & \underset{h\to 0}{=} & \langle\nabla f(x(t),y(t))|(x'(t),y'(t))\rangle h+o(h) \end{array}$$

Propriété 2 - Interprétation géométrique du gradient

On suppose que $\nabla f(a)\neq 0$.
Soit u un vecteur de norme 1 et $g : t\mapsto f(a+tu)$. Par la règle de la chaîne, $g'(t)=\langle\nabla f(a+tu)|u\rangle$ et $g'(0)=\langle\nabla f(a)|u\rangle$. Par le théorème de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{D}_u f(a)=g'(0)\leqslant\|f(a)\|$.

- En prenant $u=\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, on a $\mathrm{D}_u f(a)=\|f(a)\|$. Donc la direction $\nabla f(a)$ est une direction de plus forte pente en a.
- Et réciproquement, si u est de norme 1 et réalise le maximum des $\mathrm{D}_u f(a)$, alors par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, u et $\nabla f(a)$) sont colinéaires : il existe α réel tel que $\nabla f(a)=\alpha u$. $\mathrm{D}_u f(a)=\alpha$. Le cas où $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire à u conduit à une dérivée plus grande (positive) que le cas où $\nabla f(a)$ est négativement colinéaire à u (dérivée négative).

Selon le temps disponible, on pourra dire deux mots de l'algorithme du gradient (voire le vidéoprojeter).

Définition-propriété 2

Soient L_1 et L_2 des applications linéaires telles qu'au voisinage de 0, on ait :

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) & = & f(a)+L_1(h)+o(\|h\|) \\ f(a+h) & = & f(a)+L_2(h)+o(\|h\|) \end{array}$$

Alors $L_1(h)=L_2(h)+o(\|h\|)=L_2(h)+\|h\|\varepsilon(h)$.
Soit $u\in E$. Pour t réel suffisamment proche de 0, $t>0$, on a (en prenant $h=tu$), $L_1(tu)=L_2(tu)+t\|u\|\varepsilon(tu)$, puis $L_1(u)=L_2(u)+\|u\|\varepsilon(tu)$. On fait tendre t vers 0, on trouve $L_1(u)=L_2(u)$.

Propriété 3

Au chapitre Endomorphismes d'un espace euclidien, nous avons vu le théorème de Riesz suivant.

Théorème 8 – représentation des formes linéaires

Pour toute forme linéaire φ, il existe un unique vecteur $w\in E$ tel que :

$$\forall x\in E,\ \varphi(x)=\langle w,x\rangle$$

Nous l'appliquons ici à la forme linéaire $\mathrm{d}f(a)$. Il existe un unique vecteur w tel que $\mathrm{d}f(a)(h)=\langle w|h\rangle$.

Propriété 8

Plaçons-nous uniquement dans le cas où I est un intervalle ouvert. Par formule de différentiabilité pour une composée,

$$(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}(f\circ\gamma)(t)(1)=[\mathrm{d}f(\gamma(t))\circ\mathrm{d}\gamma(t)](1)=\mathrm{d}f(\gamma(t))(\mathrm{d}\gamma(t)(1))=\mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

Propriété 9 et début de la propriété 10

Par la propriété 8, $(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$ et il n'y a plus qu'à intéger de 0 à 1 cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$f(\gamma(1))-f(\gamma(0))=\int_0^1\mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

Conformément au programme, on se place dans le cas où $\mathcal{U}$ est convexe. Appliquons l'égalité précédente à un arc paramétré qui est un segment, le segment $[a,a+h]$. Cela se fait avec $\gamma(t)=a+th$.

$$f(a+h)-f(a)=\int_0^1\mathrm{d}f(a+th)(h)\,\mathrm{d}t$$

Si de plus, df est nulle sur $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{U}$ est convexe, alors on trouve $f(a+h)-f(a)=0$ et f est constante sur $\mathcal{U}$.
Comme énoncé en cours, on peut remplacer la convexité de $\mathcal{U}$ par sa connexité par arcs. Mais la démonstration de la propriété **??** est hors-programme en dehors du cas convexe.

Exemple des vecteurs tangents à une sphère en page 16

1. Soit $v \in T_xX$. Il existe un arc γ défini et dérivable sur un voisinage de 0 tel que γ est à valeurs dans X, et $\begin{cases}\gamma(0) & = x\\ \gamma'(0) & = v\end{cases}$.
   On prend $c(t)=\gamma(\lambda t)$ sur un voisinage de 0. c est à valeurs dans X et $\begin{cases}c(0) & = x\\ c'(0) & = \lambda v\end{cases}$. Donc $\lambda v \in T_xX$.
   Si $v \in T_xX$, alors pour tout λ réel, $\lambda v \in T_xX$.
2. Soit $v \in T_aS$ et γ un arc associé, comme précédemment. Montrons que $\langle a, v\rangle = 0$.
   Comme γ est à valeurs dans S, pour t voisin de 0, on a $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = r^2$. On dérive (rencontré au paragraphe sur les applications bilinéaires) : $2\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$. On évalue en 0 et on obtient $\langle a, v\rangle = 0$.
   $T_aS \subset (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$.
3. Réciproquement, soit $v \neq 0$ tel que $\langle a, v\rangle = 0$. Considérons

$$\gamma : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \cos(t)a + r\sin(t)\frac{v}{\|v\|} \end{pmatrix}$$

   On a $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=\frac{r}{\|v\|}v$. Vérifions que γ est à valeurs dans S. Comme a et v sont orthogonaux, on a $\|\gamma(t)\|^2 = \|\cos(t)a\|^2 + \|r\sin(t)\frac{v}{\|v\|}\|^2 = (\cos(t))^2r^2 + r^2(\sin(t))^2 = r^2$.
   Finalement $\frac{r}{\|v\|}v \in T_aS$. En utilisant le préliminaire, on a $v \in T_aS$.

Attention ! Ne pas conclure trop vite intuitivement, bien réfléchir à la signification de T_xX. Par exemple, nous avons vu que si $x \in \mathring{X}$, alors $T_xX = E$. En particulier, si Ω est ouvert, $T_x\Omega = E$ pour tout x de Ω. Si l'on revient à notre exemple,

$$\forall x \in \mathcal{B}(0,1), \quad T_xB(0,1) = E$$

ce qui ne correspond peut-être pas à notre intuition géométrique sur la boule unité, mais se comprend bien lorsqu'on relit que γ est à valeurs dans X...

Exemple des vecteurs tangents à un sous-espace affine en page 17

Soit $x \in E$.

1. Soit $v \in F$. On considère l'arc $\gamma(t) = x + tv$.
   Comme $x \in a+F$, x s'écrit $a+f$, et $\gamma(t) = a + (f+tv) \in a+F$. Donc γ est bien à valeurs dans $X = a+F$, et on a $\gamma(0)=x$ et $\gamma'(0)=v$. Donc $v \in T_xX$.
   $F \subset T_xX$.
2. (avec aide pour la topologie) Réciproquement, soit $v \in T_xX$. Il existe γ arc à valeurs dans X, défini au voisinage de 0 et dérivable en 0, tel que $v = \gamma'(0)$ et $x = \gamma(0)$.
   Pour tout t au voisinage de 0, $\gamma(t)-\gamma(0) \in F$. Et comme F est un espace vectoriel, $\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t} \in F$.

$$v = \lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma(1/n)-\gamma(0)}{1/n}$$

   Ainsi v est limite d'une suite d'éléments de F. Or F est fermé, en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $v \in F$.
   $T_xX \subset F$.

Propriété 11

Démonstration dans le cadre où $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables. On note S la surface de f : $S = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrons que l'ensemble $T_{M_0}S$ des vecteurs tangents à S en $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ est un plan vectoriel P. On pose

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

Montrons pour commencer que $T_{M_0}S = (\vec{n})^{\perp}$.

- Soit v un vecteur tangent à S en M_0.

Je note les arcs en colonne pour mieux visualiser.

Il existe un arc $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ dérivable en 0, à valeurs dans S tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = v$.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

$$v = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ x'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

On a bien $\langle v, \vec{n} \rangle = 0$.

- Réciproquement, soit $v = (v_x, v_y, v_z)$ orthogonal à $\vec{n}$. On considère l'arc suivant :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + tv_x \\ y_0 + tv_y \\ f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) \end{pmatrix}$$

On a $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = (v_x, v_y, v_x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$.
Comme $v_x n_1 + v_y n_2 + v_z n_3 = \langle v, \vec{n} \rangle = 0$, on a $v_x n_1 + v_y n_2 = -v_z n_3 = v_z$ et $\gamma'(0) = v$.
Donc $v \in T_{M_0}S$.

L'équation cartésienne du plan de vecteur normal (n_1, n_2, n_3) et passant par (a, b, c) est $n_1(x-a)+n_2(y-b)+n_3(z-c) = 0$.
En remplaçant, on trouve bien que le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par M_0 a pour équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Théorème 7

Soit $X = \{x \in \mathcal{U},\ g(x) = 0\}$ et $v \in T_a$. Soit γ un arc dérivable à valeurs dans X vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Au voisinage de 0, on a :

$$g(\gamma(t)) = 0$$

On dérive :

$$\mathrm{d}g(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0 \text{ et on évalue en } 0 : \mathrm{d}g(a)(v) = 0$$

donc $v \in \ker \mathrm{d}g(a)$.

On admet l'inclusion réciproque, conformément au programme.

Enfin, dans un espace euclidien, on a vu que $\mathrm{d}g(a)(h) = \langle \nabla g(a) | h \rangle$.