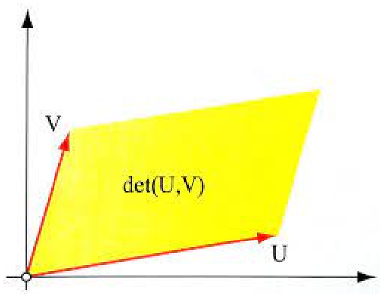
# Révisions sur les déterminants

L'objectif est de consolider les connaissances de première année, pour être bien à l'aise dans les calculs de déterminants sans excès de technicité, et d'introduire les déterminants par blocs.

---

## 1 Déterminant d'ordre 2 ou 3 : aire et volume

### 1.1 dans $\mathbb{R}^2$




Le plan euclidien est muni d'une base orthonormée directe notée $(\vec{i},\vec{j})$. Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } v \text{ sont non nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\det(\vec{u},\vec{v})$ correspond à l'aire algébrique du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi, $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Propriété 1**

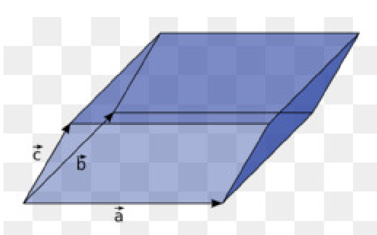
- Si on note $(x,y)$ et $(x',y')$ les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{i},\vec{j})$,
$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$
- $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$.

On reconnaît le déterminant $ad-bc$ introduit pour juger de l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On remarque que :

— $\det(\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v})$ (antisymétrie)

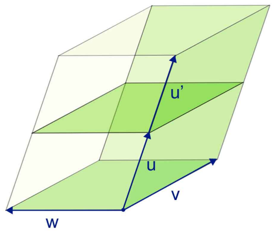
— $\det(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{v}) + \det(\vec{u},\vec{w})$ et $\det(\vec{u},\lambda v) = \lambda \det(\vec{u},\vec{v})$. det est linéaire à gauche, et par antisymétrie, bilinéaire.

### 1.2 dans $\mathbb{R}^3$

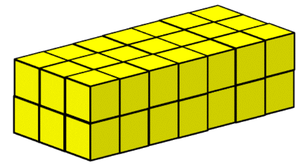


L'espace euclidien est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le déterminant de trois vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, est le volume algébrique du parallélépipède engendré par $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. De plus, $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$ si et seulement si $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sont coplanaires. Le parallélépipède engendré est alors aplati, son volume est nul.

On peut visualiser l'effet d'une addition de vecteurs et d'une multiplication d'un vecteur par un réel sur le volume du parallélépipède engendré.




$\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$



$\det(3u, 7v, 2w) = 3 \times 7 \times 2 \det(u, v, w)$

**Propriété 2**

- Si on note $(x, y, z)$, $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - x'yz'' - xy''z'$$

  C'est la règle de Sarrus.
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.

Il s'avère que det est une application trilinéaire (linéaire par raport à chacune de ses trois variables), antisymétrique (permuter deux vecteurs multiplie le déterminant par $-1$).

# 2 Déterminant de $n$ vecteurs dans une base en dimension $n$

## 2.1 généralités

Dans ce paragraphe, $E$ et $F$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**Définition 1**

Soit $f : E^n \to F$ une application $n$-linéaire, c'est-à-dire linéaire en chacune de ses $n$ variables.

- $f$ est symétrique si :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- $f$ est antisymétrique si :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

  où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation $\sigma$.
- $f$ est alternée si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0_F$$

**Propriété 3**

Une application multilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.
Si $f : E^n \to F$ est une application multilinéaire alternée, alors pour toute famille liée $(u_1, \dots, u_n)$ de $E$, $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0_F$.

### 2.2 déterminant

$E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

**Définition - propriété 1**

- Pour toute famille $\mathcal{F}$ de $n$ vecteurs de $E$ de matrice $A$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$, on appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

- $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme $n$-linéaire alternée valant 1 en $\mathcal{B}$.
- Toute forme $n$-linéaire alternée est multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

On peut en déduire une formule de changement de base. Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de $E$, les applications $\det_{\mathcal{B}}(\,.\,)$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\,.\,)$ sont toutes les deux des formes $n$-linéaires alternées. Elles sont donc proportionnelles. Il existe $\alpha$ scalaire tel que $\det_{\mathcal{B}}(\,.\,) = \alpha \det_{\mathcal{B}'}(\,.\,)$. En évaluant en $\mathcal{B}'$, on obtient plus précisément

$$\det_{\mathcal{B}}(\,.\,) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\,.\,)$$

**Propriété 4**

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $E$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.
La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Le déterminant d'une famille de vecteurs est :

— multiplié par $-1$ lorsqu'on échange deux vecteurs de la famille ;

— inchangé lorsqu'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ;

— multiplié par $\alpha$ si on multiplie un vecteur de la famille par $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit que deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont même orientation si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$. La relation binaire « avoir la même orientation que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de $E$. L'une des classes d'équivalence est formée des bases directes et l'autre est formée des bases indirectes.
Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est choisir une base de référence $\mathcal{B}_0$. Toutes les bases de même orientation que $\mathcal{B}_0$ sont dites directes tandis que les autres sont dites indirectes.

# 3 Déterminant d'une matrice carrée

**Définition 2**

Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ de la famille de ses vecteurs colonnes, soit encore

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

**Propriété 5**

Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

- $\det(I_n) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Auquel cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- Deux matrices semblables ont même déterminant.
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- Le déterminant est $n$-linéaire par rapport aux colonnes (respectivement par rapport aux lignes). En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Nous pourrons factoriser :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 0 \\ 4 & \lambda & 1 \\ 3 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

# 4 Méthodes de calcul de déterminants de matrices

## 4.1 matrices triangulaires par blocs

**Propriété 6 – triangulaires et triangulaires par blocs**

Lorsque $A$ est triangulaire, le calcul du déterminant est très facile, c'est le produit des coefficients diagonaux.

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$$

Ceci se généralise aux matrices triangulaires par blocs.

Pour $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_r)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

## 4.2 méthode du pivot

Pour calculer certains déterminants, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des déterminants de matrices triangulaires ou triangulaires par blocs.
Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes d'une matrice $A$. Soient $i \neq j$ deux indices compris entre 1 et $n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

— L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie le déterminant par $-1$.

— L'opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ laisse le déterminant invariant.

— L'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie le déterminant par $\alpha$. Il faut donc diviser par $\alpha$ pour laisser inchangé le résultat.

De même, en notant $L_1, \ldots, L_n$ les vecteurs lignes de $A$ :

— L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ multiplie le déterminant par $-1$.

— L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ laisse le déterminant invariant.

— L'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplie le déterminant par $\alpha$. Il faut donc diviser par $\alpha$ pour laisser inchangé le résultat.

Exemple : nous calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot.

$$\begin{aligned}
\det(A) &\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 6L_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & 7 & -3 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & 7 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow 3L_2}{=} \boldsymbol{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4}{=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Nous sommes arrivés au stade d'une matrice triangulaire par blocs, et nous obtenons $\det(A) = -\frac{1}{3} \times (-3) \times (-2) = -2$.

## 4.3 développement par rapport à une ligne, une colonne

**Définition 3**

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne de $A$. On appelle alors :

— mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$

— cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$

— comatrice de $A$ la matrice des cofacteurs de $A$, notée $\mathrm{Com}(A)$.

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a par exemple :

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{le mineur associé à } a_{2,3} \text{ est } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6 \text{ et le cofacteur associé est } 6$$

La matrice des cofacteurs de $A$ est $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Pour l'alternance les signes $(-1)^{i+j}$, on peut être familiarisé à l'alternance $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

ou... On commence toujours par $+$ en position $(1,1)$ car $(-1)^{1+1} = 1$.

Propriété 7

Pour tout ligne $i$, on a le développement par rapport à cette ligne $i$ :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$$

Pour tout colonne $j$, on a le développement par rapport à cette colonne $j$ :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 - 4(-6) + 7(-3) = 0.$

Exercice 1 :

1. À l'aide de développements, calculer $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (réponse : 4).
2. ✎ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (taille $n$). Calculer $D_n$ (réponse $2^{n+1} - 1$).

Propriété 8 – formule de la comatrice

$$A \times (\mathrm{Com}(A))^\top = \det(A)\, I_n = (\mathrm{Com}(A))^\top \times A$$

Si $A$ est inversible, son inverse **théorique** est $\frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^\top$. Vous avez rencontré cet inverse pour les matrices de taille 2 :

$$\text{lorsque } ad - bc \neq 0, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix} \text{ est inversible et son inverse est } \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Dans la pratique, il ne faut pas utiliser la formule de la comatrice, qui nécessite $n^2$ calculs de déterminants de taille $(n-1)$ ainsi que le calcul de $\det(A)$, pour obtenir un inverse. La méthode du pivot fait ça bien mieux !

Exercice 2 : Soit $A$ une matrice d'ordre $n$ inversible et à coefficients entiers. Montrer à l'aide de la formule de la comatrice que l'inverse de $A$ est aussi à coefficients entiers si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

## 5 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$. Toutes les représentations matricielles de $f$ sont semblables, et le déterminant d'une matrice est invariant par similitude ($\det(P^{-1}AP) = \det(A)$), donc toutes les matrices de $f$ ont même déterminant, qu'on appelle déterminant de $f$ et qu'on note $\det(f)$.
Le calcul pratique du déterminant d'un endomorphisme passe par le calcul du déterminant d'une de ses matrices et ramène au paragraphe précédent.

Propriété 9

Avec des notations faciles à comprendre,

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- $f$ est bijective si et seulement si $\det(f) \neq 0$
- $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$

Exercice 3 :

1. Calculer le déterminant d'un projecteur dans $\mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant d'une symétrie dans $\mathbb{R}^n$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, illustrer ces résultats dans des calculs d'aires orientées.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, donner la matrice de $f$, rotation vectorielle d'angle $\theta$. Calculer son déterminant et vérifier ce résultat en termes d'aires orientées.

## 6 Déterminant de Vandermonde

Propriété 10

Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on appelle *déterminant de Vandermonde* le déterminant de la matrice d'ordre $n+1$ suivant :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

On a les résultats suivants :

1. $V(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si $x_0, \dots, x_n$ sont 2 à 2 distincts.
2. $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$

Démonstration en classe en s'aidant pour 1. d'une application linéaire bien choisie.

## 7 Calcul d'un déterminant en Python

On importe la bibliothèque `numpy.linalg` et on utilise la fonction `det`. Par exemple :

```python
import numpy.linalg as al
B = [[0,2,-1,1], [-1,0,0,2],[2,2,1,-1],[0,1,0,2]]
al.det(B)
```

# 8 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Propriété 6 dans le cadre de 2 blocs

Nous allons calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

L'application $\varphi : \left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^p)^p & \to & \mathbb{K} \\ (M_1, \dots, M_p) & \mapsto & \begin{vmatrix} M & X \\ 0 & B \end{vmatrix} \end{array} \right)$ est $p$-linéaire alternée donc $\varphi$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_p}$ et plus précisément,

$$\varphi(M) = \varphi(\mathcal{B}_p) \det_{\mathcal{B}_p}(M)$$

En évaluant en $M = (C_1|C_2|\dots|C_p)$ où les $C_i$ sont les colonnes de $A$, on a $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} \times \det(A)$.

On recommence. Soit $\psi : \left( \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^q)^q & \to & \mathbb{K} \\ (N_1, \dots, N_q) & \mapsto & \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & N \end{vmatrix} \end{array} \right)$, où les $N_i$ sont les lignes de $N$. Comme $\psi$ est $q$-linéaire alternée, $\psi$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}_q}(\,.\,)$, et plus précisément, égale à $\psi(\mathcal{B}_q)\det_{\mathcal{B}_q}(\,.\,)$. On évalue en $(L_1, \dots, L_q)$, lignes de $B$. On obtient :

$$\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{vmatrix} \times \det(B)$$

Pour terminer, la matrice $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est triangulaire et a pour déterminant 1. On a bien trouvé $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

### Propriété 7

Soit $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\
&= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}(\dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots) \text{ par } n\text{-linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \quad \text{(taille } n\text{)}
\end{aligned}$$

On effectue $j-1$ échanges de colonnes pour ramener $C_j$ en tête suivie de $C_1, C_2, \dots, C_{j-1}$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 1 & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \quad \text{(taille } n\text{)}$$

On effectue $i-1$ échanges de lignes pour ramener $L_i$ en tête suivie de $L_1, L_2, \dots, L_{i-1}$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i,j} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \quad \text{(triangulaire par blocs : bloc 1 et bloc de taille } n-1\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots \\ \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \quad \text{(taille } n-1\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})
\end{aligned}$$

## Propriété 8

Nous montrons seulement que $B = A(\mathrm{Com}(A))^\top$ est égale à $\det(A)I_n$. Par formule des coefficients dans un produit matriciel,

$$\begin{aligned} b_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(\mathrm{Com}(A))_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\det(A_{i,j}) \\ &= \det(A) \text{ par développement par rapport à la ligne } i \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, procédons par astuce. Soit $M$ la matrice égale à $A$, sauf pour sa $j$-ème ligne, dans laquelle on recopie la ligne $i$. Comme deux lignes sont maintenant égales, $\det(M) = 0$. Et si on développe par rapport à cette ligne, tous les cofacteurs en jeu (de $M$) sont égaux à ceux de $A$ (puisqu'on n'a changé que la ligne $j$). Donc le développement par rapport à la $j$-ème ligne de $M$ donne :

$$0 = \det(M) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{m_{j,k}}_{=a_{i,k}} \underbrace{(-1)^{j+k}\det(M_{j,k})}_{=(-1)^{j+k}\det(A_{j,k}} = b_{i,j}$$