Familles sommables – Procédés de sommation

Ensembles dénombrables

1. Ensemble dénombrable. Ensemble au plus dénombrable (fini ou dénombrable).
2. Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
3. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
4. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est au plus dénombrable.

Cours de première année sur les familles sommables

6. Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$. Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.
7. Pour $(u_i)_{i\in I}$ famille de réels positifs, définition de $\sum\limits_{i\in I} u_i$. Invariance par permutation. Famille sommable. Opérations : somme, multiplication par un positif, sommation par paquets et théorème de Fubini positif.
8. Famille sommable de nombres complexes. Somme. Théorème de majoration. Sommation par paquets et théorème de Fubini.
9. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Conformément au programme, nous ne faisons pas de démonstrations, mais cherchons à être le plus à l'aise possible pour la pratique des probabilités et variables aléatoires discrètes (chapitres ultérieurs).

---

1 Une motivation

Dans cette partie (qui n'est pas à proprement parler du cours), nous nous intéressons à un phénomène surprenant : en modifiant l'ordre de sommation des termes d'une série, nous allons modifier la nature de cette série ! Cela nous paraît impossible, car nous sommes habitués à la commutativité de l'addition.

Avec la propriété des séries alternées, la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{k}$ est une série convergente. On peut aussi montrer que

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

Intéressons-nous à une autre série, contenant les mêmes termes, mais avec permutation de l'ordre de leur apparition, en choisissant d'intercaler d'abord 1 terme, puis 2 termes, puis 3 termes... au dénominateur pair entre chaque terme de dénominateur impair, que nous notons pour l'instant abusivement (on ne sait pas si la série converge et si l'écriture suivante a un sens) :

$$-1 + \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{7} + ...$$

que l'on peut aussi écrire par “paquets” suivants :

$$-1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7}\right) + ...$$

En annexe, il est montré que la série permutée obtenue est divergente. Ainsi, en permutant l'ordre d'apparition des termes figurant dans la série convergente $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, nous avons obtenu une série divergente !

Un tel phénomène ne peut pas s'obtenir à partir d'une série initiale convergeant absolument, comme le souligne la propriété suivante.

Propriété 1

Lorsque $\sum u_n$ converge absolument, quelle que soit φ bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Quelle que soit la façon d'indicer les termes présents dans la suite u, la somme de ces termes a une valeur commune, qu'on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Une motivation de ce chapitre est de bien préparer les chapitres de Probabilités, où nous aurons besoin de sommer sans que l'ordre importe, comme dans la propriété précédente. Nous aurons aussi besoin de gérer des indices de sommes appartenant à des ensembles autres que $\mathbb{N}$, du moment que les indices sont dans un ensemble dénombrable.

2 Ensembles au plus dénombrables

Définition 1

Un ensemble E est *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$. Concrètement, il s'agit du nombre d'éléments de E. Par convention, $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.

Définition 2

Un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
L'ensemble E est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Quand E est dénombrable, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$. On a $E = \{f(n), n \in \mathbb{N}\} = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ en posant $x_n = f(n)$. On arrive donc (au moins en théorie) à énumérer les éléments de E, à leur « attribuer un numéro ».

Propriété 2

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.
L'ensemble des entiers naturels impairs, $\{2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$, est dénombrable.
On peut énumérer $\mathbb{Z}$ comme suit : $0, 1, -1, 2, -2$, etc. On arrive à attribuer un numéro à tout entier de $\mathbb{Z}$.

valeurs dans $\mathbb{Z}$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
une numérotation dans $\mathbb{N}$	...	7	5	3	1	0	2	4	6	8	...

Ainsi $\mathbb{Z} = \{f(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ où $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $\mathbb{Z}$ est dénombrable (il faudrait, en toute rigueur, montrer que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est bijective).

Propriété 3

- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Conséquence : $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \{\frac{p}{q}\}$ sont dénombrables.

Théorème 1

Les ensembles suivants ne sont pas dénombrables :

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \qquad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad \mathbb{R}$$

Il est par conséquent impossible de numéroter les réels.

3 Familles sommables de réels positifs

Jusqu'à la fin du chapitre, I désigne un ensemble dénombrable.

Conventions de calculs dans $[0, +\infty]$

— La propriété de la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ énonce que toute partie A de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure, notée $\sup(A)$, qui peut valoir $+\infty$. Quand A est majorée, cette borne supérieure est égale à la borne supérieure définie dans $\mathbb{R}$, et quand A n'est pas majorée, la borne supérieure est $+\infty$. Quand A est vide, dans $[0, +\infty]$, $\sup(A) = 0$.

— Par convention, dans $[0, +\infty]$, $0 \times \infty = 0$. On a $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, et pour $a > 0$, $a \times (+\infty) = +\infty$. Les autres règles de calcul sont inchangées.

— Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \qquad$ et $\qquad \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Notre définition de la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes positifs doit respecter deux contraintes :

— elle ne doit pas privilégier un ordre de sommation particulier

— elle doit correspondre à l'addition lorsque I est une partie finie de $\mathbb{N}$.

Pour cela, on considère l'ensemble de toutes les sommes d'un nombre fini de termes dont les indices sont pris dans I :

$$\left\{\sum_{j\in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } I\right\}$$

Cet ensemble est une partie de $[0, +\infty[$, et admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 3

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille à termes positifs. On appelle *somme de la famille*, et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$, la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble $\left\{\sum\limits_{j\in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } I\right\}$. On dit que la famille est *sommable* si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$.

Comme on l'a définie, cette somme correspond à l'addition lorsque I est une partie finie, et est bien invariante par permutation des éléments sommés.

Propriété 4 – cas où $I = \mathbb{N}$

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, somme de la famille et somme de la série sont égales :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$$

Nous conservons, avec plus de liberté (puisque certaines quantités peuvent valoir $+\infty$), certaines pratiques :

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \qquad \text{et pour } \lambda \geqslant 0,\ \sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i$$

ainsi que le théorème de majoration : si $0 \leqslant u_i \leqslant w_i$ et si la famille $(w_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
À condition de travailler avec des termes positifs, on peut calculer, regrouper les termes comme on le souhaite, sommer dans l'ordre qu'on veut quand il y a plusieurs indices, et justifier a posteriori la sommabilité de la famille. Deux façons de faire sont fréquentes :

Propriété 5

Les familles considérées sont à termes positifs et les ensembles considérés sont au plus dénombrables.

La sommation par paquets : Si les $(I_k)_{k\in K}$ forment une partition de I, on a :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$$

Le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} u_{i,k} \quad =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} u_{i,k} \quad =$$

✎ Exercice 1 : La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*,\ i \text{ impair}} \frac{1}{i^2}$.

Exercice 2 : Étudier la sommabilité des familles suivantes.

$$\left((\frac{1}{3})^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \qquad \left(\frac{(i+1)n^i}{n!i!}\right)_{(n,i)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 3 : Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^5}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Exercice 4 : À l'aide du théorème de Fubini positif, montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

Exercice 5 : Soit $a > 1$.

1. Montrer que pour p et q dans $\mathbb{N}$, $2a^{\frac{p+q}{2}} \leqslant a^p + a^q$.
2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^p+a^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Retour sur l'hypothèse de dénombrabilité faite sur I

Uniquement pour ce paragraphe, on ne suppose plus que I est dénombrable. En annexe, est démontré le résultat suivant :

Soit I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire si

$$\sup\left\{\sum_{j\in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } I\right\} < +\infty$$

alors $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Et donc en fait, c'est comme si on sommait uniquement sur un ensemble dénombrable.

4 Familles sommables de nombres complexes

Dans cette section, on considère un ensemble dénombrable I et une famille $(u_i)_{i\in I}$ de complexes.

Définition 4

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est une famille sommable de nombres positifs.

> Cette définition ramène à l'étude de familles sommables de termes positifs. En particulier, si on s'intéresse juste au fait de savoir qu'une famille est sommable, on pourra avoir recours au théorème de majoration, ou encore montrer par les calculs de la section précédente que $\sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

parties positive et négative d'un réel

Pour x réel,

$$x^+ = \max(x, 0) = \frac{x + |x|}{2} \qquad \text{est la partie positive de } x$$
$$x^- = \max(-x, 0) = \frac{|x| - x}{2} \qquad \text{est la partie négative de } x$$

Par exemple, la partie positive de $7,3$ est 7,3 (et sa partie négative est nulle) et la partie négative de $-5,24$ est $5,24$ (et sa partie positive est nulle). On a

$$x = x^+ - x^-$$

On définit alors les sommes des familles sommables.

- Pour $(u_i)_{i\in I}$ famille de **réels**, la famille est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont. La somme est :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$
- Pour $(u_i)_{i\in I}$ famille de **complexes**, la famille est sommable si, et seulement si, les familles de réels $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables, et on a :
$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i}\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

En présence de familles sommables, nous conservons les propriétés suivantes :

— la linéarité, l'inégalité triangulaire, toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable,
— l'invariance de la somme par permutation des termes,
— la sommation par paquets,
— le théorème de Fubini.

Exercice 6 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{p,q\geqslant 0}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 7 : On donne à nouveau $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.
2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

5 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

On cherche ici à sommer un produit $a_i b_j$ où les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont sommables. Par le théorème de Fubini, on peut sommer indifféremment :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) \text{ sommation verticale, par colonnes}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) \text{ sommation horizontale, par lignes}$$

5	• a_0b_5	• a_1b_5	• a_2b_5	• a_3b_5	• a_4b_5	• a_5b_5
4	• a_0b_4	• a_1b_4	• a_2b_4	• a_3b_4	• a_4b_4	• a_4b_5
3	• a_0b_3	• a_1b_3	• a_2b_3	• a_3b_3	• a_4b_3	• a_3b_5
2	• a_0b_2	• a_1b_2	• a_2b_2	• a_3b_2	• a_4b_2	• a_2b_5
1	• a_0b_1	• a_1b_1	• a_2b_1	• a_3b_1	• a_4b_1	• a_1b_5
0	• a_0b_0	• a_1b_0	• a_2b_0	• a_3b_0	• a_4b_0	• a_0b_5
	0	1	2	3	4	5

On peut aussi utiliser une sommation par paquets, qui correspond à sommer suivant les diagonales, en introduisant :

$$I_k = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2, \mid\ i+j=k\}$$

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. Par le théorème de sommations par paquets sur la famille sommable $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$,

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{(i,j)\in I_k} a_i b_j = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

5	• a_0b_5	• a_1b_5	• a_2b_5	• a_3b_5	• a_4b_5	• a_5b_5
4	• a_0b_4	• a_1b_4	• a_2b_4	• a_3b_4	• a_4b_4	• a_4b_5
3	• a_0b_3	• a_1b_3	• a_2b_3	• a_3b_3	• a_4b_3	• a_3b_5
2	• a_0b_2	• a_1b_2	• a_2b_2	• a_3b_2	• a_4b_2	• a_2b_5
1	• a_0b_1	• a_1b_1	• a_2b_1	• a_3b_1	• a_4b_1	• a_1b_5
0	• a_0b_0	• a_1b_0	• a_2b_0	• a_3b_0	• a_4b_0	• a_0b_5
	0	1	2	3	4	5

Définition 5

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries, la série de terme général c_n défini par

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Théorème 2

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

✎ Exercice 8 : Appliquer le théorème du produit de Cauchy aux séries exponentielles $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ pour a et b dans $\mathbb{C}$. Quel résultat obtient-on ?

✎ Exercice 9 : Soit $x \in]-1,1[$. Appliquer le théorème du produit de Cauchy aux séries $\sum x^n$ et $\sum x^n$. Savez-vous démontrer autrement le résultat obtenu ?

6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Motivation en page 1 (hors-programme)

Notons (u_n) la suite $(-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{5}, ...)$ et (S_n) la suite de ses sommes partielles.
Notons P_k le k^{e} " paquet " (ou regroupement) effectué ci-dessus. $P_1 = -1$, $P_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $P_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$.
Pour $k \geqslant 2$, P_k a k termes et s'écrit

$$P_k = \frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_k + 2} + ... + \frac{1}{d_k + 2(k-2)} - \frac{1}{(2k-1)}$$

Le premier dénominateur de P_k, d_k, vérifie $d_{k+1} = d_k + 2(k-1)$ soit encore $d_{k+1} - d_k = 2(k-1)$ on obtient par sommation pour k allant de 2 à $n-1$ $d_n - d_2 = (n-1)(n-2)$ puis $d_k = (k-1)(k-2) + 2$. Ainsi

$$P_k = \frac{1}{(k-1)(k-2)+2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)+4} + \frac{1}{(k-1)(k-2)+6} + ... + \frac{1}{(k-1)(k-2)+2(k-1)} - \frac{1}{2k-1}$$

Le nombre de termes consécutifs de la suite u dans $-1 + \sum_{k=2}^{n} P_k$ est $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et donc $S_{\frac{n(n+1)}{2}} = -1 + \sum_{k=2}^{n} P_k$. De plus
$P_k \geqslant (k-1)\dfrac{1}{(k-1)(k-2)+2(k-2)} - \dfrac{1}{2k-1} \geqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2k-1} \geqslant \dfrac{k-1}{k(2k-1)}$
et comme $\frac{k-1}{k(2k-1)} \sim \frac{1}{2k}$, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{k-2}{(k+1)(2k-1)}$ diverge. Par ce même théorème appliqué à l'inégalité $P_k \geqslant \frac{k-2}{(k+1)(2k-1)}$, on en déduit que $\sum P_k$ diverge.
La suite $\left(\sum_{k=2}^{n} P_k\right)_{n \geqslant 2}$ étant croissante, on en déduit que $\sum_{k=2}^{n} P_k \to +\infty$, puis $S_{\frac{n(n+1)}{2}} \to +\infty$, ce qui prouve la divergence de $\sum u_n$.

Propriété 4

- Supposons que la famille est sommable. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $[\![0, n]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, et on a donc par définition du sup :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} u_k \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$$

Comme les u_k sont positifs, la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)$ est croissante. On vient de voir qu'elle est majorée. Elle converge donc. Et par passage à la limite dans une inégalité large :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i$$

- Supposons que la série $\sum u_k$ converge.

Comme u est à termes positifs, pour J partie finie de $\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j \in J} u_j \leqslant \sum_{k=0}^{\max(J)} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\sum_{j \in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\}$. Cet ensemble étant majoré, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. De plus,

$$\sup\left\{\sum_{j \in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ soit } \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

En reprenant le premier point, on a dans une de ces deux situations équivalentes : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup\left\{\sum_{j \in J} u_j, \quad J \text{ partie finie de } \mathbb{N}\right\}$.

Explication sur la dénombrabilité en page 5

Supposons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable et posons $S = \sup\{\sum_{j \in J} u_j \text{ avec } J \text{ partie finie de } I\} < +\infty$. On remarque que

$$\{i \in I,\ u_i \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \quad \text{ avec } I_n = \{i \in I,\ u_i \geqslant \frac{1}{n}\}$$

Soit J une partie finie de I_n. On a $\sum_{j \in J} u_j \leqslant S$, et donc $\frac{1}{n} \operatorname{Card}(J) \leqslant S$, puis $\operatorname{Card}(J) \leqslant nS$.

Donc I_n admet au plus $\lfloor nS \rfloor + 1$ éléments, et I est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.