

# Compléments d'algèbre linéaire

1. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Projecteurs associés à une décomposition de  $E$  en somme directe.
2.  $\dim(\sum_{i=1}^p F_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$  et cas d'égalité.
3. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
4. Détermination de  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  par la connaissance des restrictions  $u|_{E_i}$ .
5. Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles : combinaison linéaire, transposition, produit.
6. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.

## 1 Somme et somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe,  $p \geq 2$ ,  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

### Définition - propriété 1

On appelle *somme* de  $F_1, \dots, F_p$ , et on note  $\sum_{i=1}^p F_i$ , l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_p \in F_p\}$$

$F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  à contenir tous les  $F_i$ .

### Définition 1

On dit que la somme  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est *directe*, et on note  $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  ou  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ , lorsque la décomposition de tout vecteur de  $F_1 + \dots + F_p$  en somme de vecteurs des sous-espaces vectoriels  $F_i$  est unique.

### Propriété 1 – Caractérisation par la décomposition de $0_E$

Les sous-espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont en somme directe si, et seulement si, la décomposition du vecteur nul comme somme de vecteurs des sous-espaces  $F_i$  est unique.

Exercice 1 : On considère les sous-espaces vectoriels de  $E = \mathbb{R}_3[X]$  suivants. Montrer que  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$ .

$$F_1 = \text{Vect}(1, X), \quad F_2 = \text{Vect}(X^2 + 4X) \quad F_3 = \text{Vect}(X^3 - 1)$$

Donner les projecteurs associés à cette somme directe.

### Propriété 2 – Caractérisation par les dimensions

On suppose ici que  $E$  est de dimension finie. On a toujours

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

Il y a égalité des dimensions si et seulement si la somme est directe.

### Théorème 1 – Théorème de la base adaptée

Ici  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie.

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , de bases respectives  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  est une somme directe.
2. La concaténation des bases  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ .

Lorsque  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ , on appelle *projecteurs associés* à cette somme directe, les projections  $p_i$  où  $p_i$  est la projection sur  $E_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ .

Et on appelle *base adaptée* à cette somme directe, toute base de  $E$  qui est concaténation de bases de  $E_1, \dots, E_p$ .

Exercice 2 : Dans  $E = \mathbb{R}^4$  muni de la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , on considère

$$F_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3) \quad F_2 = \text{Vect}(e_1 + e_4, e_2) \quad F_3 = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_4)$$

1. Montrer que la somme  $F_1 + F_2 + F_3$  n'est pas directe.
2. Montrer que  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ . On admet que  $F_2 \cap F_3 = \{0\} = F_1 \cap F_3$ .

### Propriété 3

La famille des projecteurs associés à  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  vérifie :

$$\sum_{i=1}^p p_i = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, p_i \circ p_j = 0$$

### Propriété 4 – caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions

$F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On se donne  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  et  $p$  applications linéaires  $u_i : E_i \rightarrow F$ .

Il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  pour laquelle chaque restriction  $u|_{E_i}$  est égale à  $u_i$ .

## 2 Matrices dans des bases adaptées

### Définition 2


Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $F$  est stable par  $f$  si  $f(F) \subset F$ , c'est-à-dire si  $\forall x \in F, f(x) \in F$

L'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est l'endomorphisme  $u_F \in \mathcal{L}(F)$  défini par :

$$u_F : \begin{pmatrix} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soient  $u$  et  $w$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. Montrer que  $\ker u$  et  $\text{Im } u$  sont stables par  $w$ .

 Exercice 4 : Les questions sont indépendantes, mais toutes sur le thème du choix d'une base adaptée et de sous-espaces stables.

1. Rappeler la matrice d'un projecteur dans une base adaptée à  $E = \ker(p - \text{Id}) \oplus \ker p$ . Donner la matrice d'une symétrie dans une base adaptée à  $E = \ker(s - \text{Id}) \oplus \ker(s + \text{Id})$ .

2. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $\ker(g - \text{Id}) \oplus \ker(g - 2\text{Id}) \oplus \ker(g + 4\text{Id}) = \mathbb{R}^3$  et donner la matrice de  $g$  dans une base adaptée à cette décomposition.

3. Donner la forme de la matrice de  $f$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  avec les  $F_i$  stables par  $f$ .

Réduire un endomorphisme  $u$  consistera à écrire  $E$  comme somme directe de sous-espaces stables par  $u$  pour lesquels les matrices associées seront les plus simples possibles, par exemple diagonales ou triangulaires. Déterminer des conditions pour établir l'existence de tels espaces est l'est un des grands objectifs du programme d'algèbre de MP. Pour l'instant, nous savons réduire une matrice de projection et une matrice de symétrie.

Exercice 5 – Exercice résolu. Réduire  $s$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ .  $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

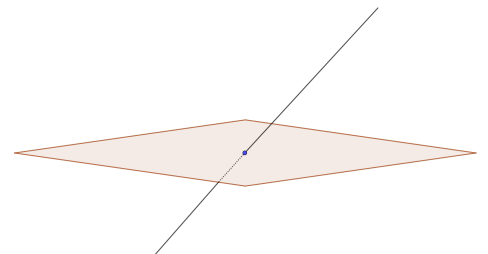
et  $M^2 = I_3$  donc  $M$  est une matrice de symétrie.

On cherche  $\ker(s - \text{Id})$  et  $\ker(s + \text{Id})$ . On trouve

$$\ker(s - \text{Id}) = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \quad \ker(s + \text{Id}) = \text{Vect}(1, 1, 1)$$

Une base adaptée à  $\mathbb{R}^3$  est  $(u, v, w) = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1))$ .

Dans cette base, la matrice de  $s$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Vect}(u, v)$  parallèlement à  $\text{Vect}(w)$ .



### 3 Matrices définies par blocs

#### 3.1 combinaison linéaire, produit

Pour  $A, B, C, D$  matrices de tailles compatibles, une matrice par blocs est de la forme  $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ . On peut étendre à davantage de blocs encore. Les opérations ne posent pas de problème, que ce soit la multiplication par un scalaire, l'addition, ou encore le produit. Le produit par blocs s'effectue en gros comme un produit usuel mais comme le produit matriciel n'est pas commutatif, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on écrit chaque produit.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline -1 & -2 & -3 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) =$$

Propriété 5 – règles de calculs par blocs

**Produit :** avec des matrices de tailles compatibles,

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + CF & AG + CH \\ \hline BE + DF & BG + DH \end{array}\right)$$

**Transposée :**

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right)$$

— Au chapitre Déterminants, nous avons rencontré des matrices triangulaires par blocs, qui peuvent être supérieures ou inférieures :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & A_r \end{pmatrix}$$

On a appris que le déterminant était dans ce cas égal au produit des déterminants des blocs diagonaux. En cas particulier de matrices triangulaires par blocs, il y a les matrices diagonales par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

— Le produit par blocs peut se généraliser à plus de quatre blocs. Par exemple, dans le cas de triangulaires supérieures,

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r B_r \end{pmatrix}$$

#### 3.2 tranvections par blocs

En première année, vous avez rencontré des matrices de tranvection de la forme  $I_n + \lambda E_{i,j}$  avec  $i \neq j$ , et vous avez vu qu'une multiplication de  $A$  par une telle matrice effectuait une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes de  $A$ . Nous généralisons ici. Il ne s'agit pas d'apprendre par cœur mais de pouvoir retrouver rapidement telle ou telle opération élémentaire par blocs.

Propriété 6

- Une action sur les colonnes? Transvection à droite!

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} =$$

En prenant  $T = \lambda I$ , on pourra retrouver  $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$  (ou  $C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$ ), tout en notant que ces actions sont faites sur plusieurs colonnes en même temps.

- Une action sur les lignes? Transvection à gauche!

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} =$$

En prenant  $T = \lambda I$ , on pourra retrouver  $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$  (ou  $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ ), tout en notant que ces actions sont faites sur plusieurs lignes en même temps.

Comme les matrices  $\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix}$  sont triangulaires et n'ont que des 1 sur la diagonale, elles sont inversibles et de déterminant 1. Par conséquent, multiplier par des matrices de transvection par blocs conserve le rang et le déterminant.

Comme dans la méthode du pivot, on peut s'en servir pour obtenir des matrices triangulaires par blocs et calculer le rang ou le déterminant.

Exercice 6 : Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  a pour déterminant  $\det(A + B) \det(A - B)$ .

## 4 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Définition-propriété 1

Pour les 3 points de sous-espace vectoriel :

- $F_1 + \dots + F_p \subset E$
- $0_E \in F_1 + \dots + F_p$  car  $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$ .
- Avec des notations évidentes, pour tous  $x = x_1 + \dots + x_p$ ,  $y = y_1 + \dots + y_p$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{\lambda x_p + y_p}_{\in F_p}$$

par stabilité par combinaison linéaire des  $F_i$  en tant que sous-espaces vectoriels.

Par ailleurs,  $x_i \in F_i$  s'écrit  $0_E + \dots + 0_E + x_i + 0_E + \dots + 0_E \in F_1 + \dots + F_p$ .

### Propriété 1

Le sens direct est immédiat, puisque dans une somme directe, la décomposition de tout vecteur est unique. Reste à montrer que l'unicité de la décomposition du vecteur nul implique l'unicité de la décomposition de n'importe quel vecteur. Supposons que  $x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p$  avec pour tout  $i$ ,  $x_i \in F_i$ ,  $y_i \in F_i$ . Alors :

$$x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_p - y_p = 0 \text{ avec pour tout } i, x_i - y_i \in F_i$$

Par unicité de la décomposition du vecteur nul,  $x_i - y_i = 0$  pour tout  $i$ . Puis  $x = y$ .

### Propriété 2

L'application linéaire  $\varphi : \begin{pmatrix} F_1 \times \dots \times F_p & \longrightarrow & F_1 + \dots + F_p \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_p \end{pmatrix}$  est surjective.

- Si  $\varphi$  est injective (c'est le cas où la somme est directe), c'est un isomorphisme et  $\dim F_1 \times \dots \times F_p = \dim(F_1 + \dots + F_p)$ . Donc  $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim(F_1 + \dots + F_p)$ .

- Sinon,  $\varphi$  n'est pas injective, et alors par le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } \varphi < \dim(F_1 \times \dots \times F_p) \quad \text{soit} \quad \dim(F_1 + \dots + F_p) < \dim(F_1 + \dots + F_p)$$

### Théorème 1

On note  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_p$ . On va montrer (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) où

1.  $F$  est une somme directe
2. la concaténation des bases  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $F$
3.  $\dim F = \sum_{i=1}^p \dim F_i$ .

et cela fournira en particulier le théorème de la base adaptée du cours.

- ((1)  $\Rightarrow$  (2)) On suppose que  $F = F_1 + \dots + F_p$  est une somme directe.

Soit  $\mathcal{F}$  la concaténation de  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , bases respectives de  $F_1, \dots, F_p$ .

On note  $(b_1^{(j)}, \dots, b_{n_j}^{(j)})$  la base  $\mathcal{B}_j$ .

—  $\mathcal{F}$  est-elle libre ?

Si  $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} b_i^{(j)} = 0_E$ , alors par unicité de la décomposition de  $0_E$  dans une somme directe, on a (bien identifier les vecteurs des  $F_j$ ) :

$$\forall j, \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} b_i^{(j)} = 0$$

mais alors par liberté de  $\mathcal{B}_j$ , pour tout  $i$  entre 1 et  $n_j$ ,  $\lambda_{i,j} = 0$ .  $\mathcal{F}$  est libre.

—  $\mathcal{F}$  est-elle génératrice de  $F$  ?

Soit  $x \in F$ .  $x$  s'écrit  $x_1 + x_2 + \dots + x_p$  avec  $x_1 \in F_1 = \text{Vect}(\mathcal{B}_1), \dots, x_p \in F_p = \text{Vect}(\mathcal{B}_p)$ . Donc  $x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

- ((2)  $\Rightarrow$  (3))

On poursuit avec les mêmes notations. Puisque  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$ ,  $\dim F = \text{Card } \mathcal{F} = \sum_{j=1}^p n_j = \sum_{j=1}^p \dim F_j$ .

- ((3)  $\Rightarrow$  (2))

Soit encore  $\mathcal{F}$  la concaténation de  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , bases respectives de  $F_1, \dots, F_p$ .

Avec la même rédaction que dans (1)  $\Rightarrow$  (2),  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$ . De la famille génératrice  $\mathcal{F}$ , on peut extraire une base de  $F$ . Or  $\text{Card } \mathcal{F} = \dim F_1 + \dots + \dim F_p \stackrel{(3)}{=} \dim F$ . C'est donc que dans notre extraction, aucun vecteur n'a été enlevé. Et donc que  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$ .

- ((2)  $\Rightarrow$  (1))

On suppose que  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$  avec  $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$ . Chaque  $x_j$  se décompose dans  $(b_1^{(j)}, \dots, b_{n_j}^{(j)})$  base  $\mathcal{B}_j$  de  $F_j$ .

On se retrouve avec une somme du type  $\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (x_j)_i b_i^{(j)} = 0_E$ . Par liberté de la concaténation de  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , on obtient  $(x_j)_i = 0$  pour tout  $i$ , tout  $j$ , puis  $x_j = 0_E$  pour tout  $j$ .

### Propriété 3

- Pour  $x \in E$ ,  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$  où  $x_i \in F_i$ , pour tout  $i$ . Par définition de  $p_i$ ,  $x_i = p_i(x)$ . On a donc facilement

$$x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x)$$

- L'écriture  $p_j(x) = 0_E + \dots + 0_E + p_j(x) + 0_E + \dots + 0_E$  fournit ; par définition de  $p_i$ , pour  $i \neq j$ ,  $p_i(p_j(x)) = 0_E$ .

### Propriété 4

- Analyse. Supposons que  $u$  existe. Pour  $x \in E$ , on a  $x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x)$  avec les notations de la propriété 3. Par linéarité de  $u$ ,

$$u(x) = u(p_1(x)) + u(p_2(x)) + \dots + u(p_p(x)) = u_1(p_1(x)) + \dots + u_p(p_p(x))$$

et  $u(x)$  est défini de manière unique.

- Synthèse. Réciproquement, notons  $u : x \mapsto \sum_{k=1}^p u_k \circ p_k$ . On a  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soit  $x \in E_i$ . Comme  $E_i = \text{Im } p_i = \text{Inv } p_i$ , on a  $p_i(x) = x$ .

$$u(x) = \sum_{k=1}^p u_k \circ p_k(p_i(x))$$

avec la propriété 3, il vient :

$$u(x) = u_i \circ p_i(p_i(x)) + 0_E = u_i(p_i(x)) = u_i(x)$$