Remise en route – Algèbre linéaire et polynômes

1 Systèmes linéaires

Un système linéaire peut admettre :
- soit aucune solution,
- soit une infinité de solutions,
- soit une unique solution. On dit alors que c'est un système de Cramer. Ce cas survient si, et seulement si, le déterminant du système est non nul.

Pour résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauß, on ramène le système à un système triangulaire, on complète les lignes manquantes, et on effectue la remontée.

Exercice 1 : Donner un exemple pour chacun des cas de figure (0 solution / 1 solution / une infinité de solutions). Pour chacun, mettre le système sous forme matricielle. Pour chacun, calculer le déterminant du système.

Exercice 2 : Effecter la méthode du pivot de Gauß sur le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 3 (extrait B.E.O) : Sachant que le système suivant admet une solution autre que $(u,v)=(0,0)$, montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1)-36=0$ et en déduire les valeurs possibles de λ.

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccc} 4u & + & 16v & = & \lambda u \\ 6u & - & v & = & \lambda v \end{array}\right.$$

Savoir-faire

Un système linéaire homogène est un espace vectoriel. Il faut savoir le présenter sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.

Exercice 4 : Mettre F sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille, pour chacun des cas suivants.
1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\}$
2. $F=\{x\in\mathbb{R}^n,\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

Savoir-faire

La matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système écrit matriciellement $AX=Y$ est un système de Cramer.

Dans ce cas, $AX=Y \Leftrightarrow X=A^{-1}Y$.

Exercice 5 : Déterminer l'inverse de $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ par la méthode de Cramer.

---

2 Calcul matriciel

La formule du coefficient en ligne i et colonne j d'un produit de deux matrices est :

$$[AB]_{i,j} =$$

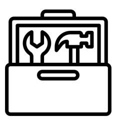
Exercice 6 : Calculer les coefficients de A^3.

Exercice 7 (oral Mines - Télécom) : en utilisant les matrices élémentaires, déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Polynômes

Savoir-faire

Qui dit racine dit factorisation...



$$P(a) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Exercice 8 : Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les polynômes de degré n, divisibles par $X+1$, et dont les restes dans la division euclidienne par $X+2, X+3, \ldots, X+n+1$ sont égaux.

Exercice 9 (B.E.O.) : Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

4 Familles

Exercice 10 : Montrer que (a,b,c) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, où $a_n = 1$, $b_n = (\frac{1}{2})^n$ et $c_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$.

Exercice 11 : On donne $\begin{cases} P_0 & = 1 \\ P_{k+1} & = XP_k + k \text{ pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5 Sous-espaces vectoriels

Savoir-faire

Il faut savoir montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence :

— par la méthode des trois points,

— par la méthode de l'espace vectoriel engendré, quand c'est possible.

Savoir-faire

Il faut avoir **compris** ce que représente la dimension d'un espace vectoriel. C'est le « nombre de paramètres libres de varier ».

Savoir-faire

Il faut savoir montrer l'égalité de deux espaces vectoriels :

— par double-inclusion,

— en dimension finie, par une inclusion et l'égalité des dimensions.

Exercice 12 : Questions de dimension. Ici, on ne demande pas de démonstration. On demande de **comprendre**.

1. Pourquoi dit-on qu'on vit dans un espace de dimension 3 ?
2. Comment se fait-il que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$ est un espace de dimension 2 ?
3. Quelle est la dimension de $G = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$?
4. Donner, en expliquant, la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices diagonales, de $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n, de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices qui ont tous les coefficients nuls, hormis sur les bords, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices symétriques, de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 13 : $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n\}$.

1. Démontrer (ou, au moins, expliquer) : $\dim F = 3$.
2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ où $u_n = 1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 2^n$.

6 Représentations matricielles d'une application linéaire, noyau, image

Dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'un espace de dimension finie n, en notant A et B leur représentation matricielle relativement à une base de E, on a les correspondances suivantes.

objets	représentation matricielle
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x) \in E$	AX
$f + g$	$A + B$
$f \circ g$	AB
f^{-1} (si $f \in \mathrm{GL}(E)$)	A^{-1}

Savoir-faire

Il faut savoir déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire.

- Dans le cas où l'on dispose d'une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de l'ensemble de départ, on a la formule très efficace :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

- Pour trouver le noyau, une possibilité est de résoudre $f(x) = 0$ en utilisant $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$.
- On vérifie la cohérence des résultats avec le théorème du rang.

Exercice 14 : Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{pmatrix}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
2. Donner une représentation matricielle de f.
3. Déterminer le noyau de f.