Séries numériques

Compléments sur les séries numériques (termes appartenant à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Technique de comparaison série-intégrale. Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, notamment dans le cas d'une fonction monotone, ou encore estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes.
2. Règle de d'Alembert.
3. Sommation des relations de comparaison ($\sim$, O, o) : pour les restes dans le cas convergent, pour les sommes partielles dans le cas divergent. Cas particulier du théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

---

1 Révisions sur les séries numériques

Définition 1

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On peut lui associer la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad \text{le plus souvent } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{ou} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

De quelle *nature* est la série ?

— si la suite (S_n) diverge, on dit que la série $\sum u_k$ diverge ;

— si la suite (S_n) converge, on dit que la série $\sum u_k$ converge.

Dans le cas où la série $\sum u_k$ converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelée *somme de la série* et est notée $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k$. On définit la suite $(R_n)_{n\geqslant n_0}$ des restes de la série par :

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

> Le *reste de rang n de la série* est ce qu'il reste à sommer quand on n'a sommé que jusqu'au rang n.
> Par propriété, quand la série converge, le reste tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. Changer les premiers termes de la série ne modifie pas sa nature.

1.1 propriétés pour des séries qui sont convergentes

Propriété 1 – linéarité

Soient deux séries de terme général u_k et v_k convergentes, et λ et μ réels.
Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente : $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$ converge.
On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

On peut généraliser à une combinaison linéaire de séries comportant plus de deux séries.

Propriété 2 – positivité et stricte positivité de la somme d'une série convergente

Soit $\sum u_k$ une série **convergente**.

- Si pour tout k, on a $u_k \geqslant 0$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \geqslant 0$.
- Si pour tout k, on a $u_k > 0$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$.
- Si pour tout k, $u_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$, alors : pour tout k, $u_k = 0$.

Propriété 3 – croissance de la somme pour des séries convergentes

Soient $\sum u_k$ et $\sum w_k$ deux séries **convergentes** telles que pour tout k, $u_k \leqslant w_k$. On a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$$

Définition - propriété 1 – convergence absolue

La série $\sum u_k$ converge absolument lorsque $\sum |u_k|$ converge.
Si une série converge absolument, alors cette série converge, et on a l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Une série peut être convergente sans être absolument convergente.
C'est le cas de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ par exemple.

1.2 séries de référence

Propriété 4 – séries de Riemann

La série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Propriété 5 – séries géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général z^k est appelée série géométrique (de raison z). Elle converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas, la somme de la série est :

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et de plus, } \sum_{k=d}^{+\infty} z^k = z^d \times \frac{1}{1-z}$$

Propriété 6 – série exponentielle

Pour tout complexe z, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

1.3 comment utiliser les séries de référence pour étudier la nature d'une série ?

Propriété 7 – théorèmes de comparaison

- **Théorème de majoration-minoration**

On suppose que $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

— si la série de terme général a_n diverge alors la série de terme général b_n diverge ;

— si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.

- **Règle de domination**

On suppose que b_n est positif et que $a_n = O(b_n)$.
Si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.

- **Règle de négligeabilité**

On suppose que b_n est positif et que $a_n = o(b_n)$.
Si la série de terme général b_n converge, alors la série de terme général a_n converge.

- **Critère d'équivalence**

On suppose que b_n est positif et que $a_n \sim b_n$.
La série de terme général a_n et la série de terme général b_n sont de même nature.

Exercice 1 :

Étudier la nature des séries de terme général suivant.

1. $a_n = \ln(1 + e^{-n})$
2. $b_n = \arctan \frac{1}{n+1}$
3. $c_n = \dfrac{2n+3}{4 + 5n + 6n^2 + 7n^3}$
4. $d_n = \dfrac{(-1)^n + \sin(n)}{n^2 + 1}$
5. $e_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$
6. $f_n = \dfrac{(\ln n)^3}{n^2}$

1.4 liens suite-série

Propriété 8 – divergence grossière

Si la série $\sum u_k$ converge, alors son terme général tend vers 0.
Par contraposée, si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge. On parle dans ce cas de *divergence grossière*.

Démonstration : $u_n = S_n - S_{n-1}$. Donc si la suite (S_n) converge, alors $\lim u_n = 0$.
La réciproque est fausse : la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0, mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Quand on veut prouver la convergence d'une série, la question n'est pas tant de savoir si le terme tend vers 0, mais plutôt à quelle vitesse !

Propriété 9 – théorème du télescopage

La **suite** (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ converge.

Démonstration : Par télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$. Donc la suite (u_n) converge si et seulement si la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)\right)$ converge, si et seulement si la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ converge.

Exercice 2 : On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_{k+1} - u_k| \leqslant \frac{1}{2^k}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

1.5 le critère des séries alternées

Définition 2

On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle de signe constant.

La plus connue de ces séries alternées est $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Théorème 1 – théorème des séries alternées

Si la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

On en déduit que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

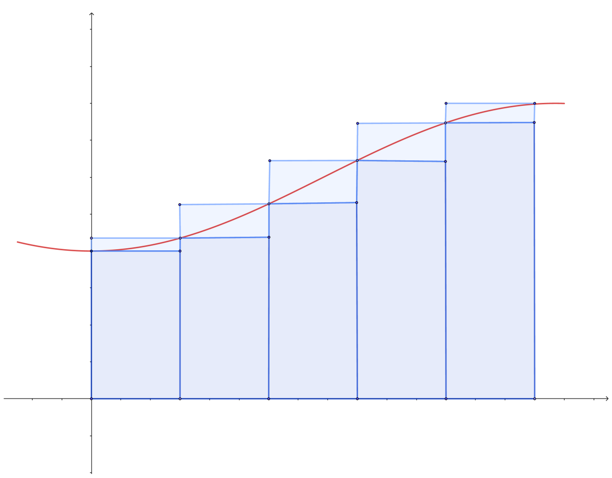
Théorème 2 – théorème spécial des séries alternées

Si la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
Le premier terme de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ et on a les informations complémentaires :

$$\begin{cases} R_n \text{ est du signe de son premier terme} \\ \\ |R_n| \leqslant |\text{son premier terme}| \qquad \text{à savoir } |R_n| \leqslant a_{n+1} \end{cases}$$

2 Technique de comparaison série-intégrale

Graphiquement, on comprend bien la méthode consistant à encadrer l'intégrale de f sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles (d'où le nom de méthode des rectangles). Voici une situation dans laquelle f est croissante.



On considère une série $\sum f(n)$ où f est une fonction continue et monotone sur $\mathbb{R}^+$. On peut comparer les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$ à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple, f est croissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$$

Puis par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$,

$$\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t$$

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et celle de droite pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on obtient via la relation de Chasles :

$$f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.
Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence). Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes !

Exercice 3 : Donner un équivalent de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 (oral Mines-Télécom 2023) : Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$.

3 Règle de d'Alembert pour les séries numériques

Propriété 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire, il faut chercher une autre façon d'étudier la série.

Exercice 5 : Étudier les séries de terme général suivant.

1. $a_n = \dbinom{2n}{n}$
2. $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$

De manière générale, la règle de d'Alembert est particulièrement adaptée aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances.

4 Sommation des relations de comparaison

Propriété 11 – référence convergente positive et reste

Soient $\sum u_n$ et $\sum w_n$ deux séries, telles que $\sum w_n$ est **convergente** et $w_n \geqslant 0$.
On note respectivement $R_n(u)$ et $R_n(w)$ les restes de rang n de ces séries.

- Si $u_n \sim w_n$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) \sim R_n(w)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) = o(R_n(w))$.
- Si $u_n = O(w_n)$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\quad R_n(u) = O(R_n(w))$.

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang.**

Propriété 12 – référence divergente positive et sommes partielles

Soient $\sum u_n$ et $\sum w_n$ deux séries, telles que $\sum w_n$ est **divergente** et $w_n \geqslant 0$.
On note respectivement $S_n(u)$ et $S_n(w)$ les sommes partielles de rang n de ces séries.

- Si $u_n \sim w_n$ alors la série $\sum u_n$ diverge et $\quad S_n(u) \sim S_n(w)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors $\quad S_n(u) = o(S_n(w))$.
- Si $u_n = O(w_n)$ alors $\quad S_n(u) = O(S_n(w))$.

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang.**

✎ Exercice 6 : Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

✎ Exercice 7 : En utilisant $\dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k+1)}$, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Propriété 13 – théorème de Cesàro

- Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ. On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

- Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite divergente de limite $+\infty$. On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

5 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Règle de d'Alembert en page 5

Le fait d'avoir énoncé avec valeurs absolues ou module permet de se ramener au cas où u est une suite à termes positifs.

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang p, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Comme $u_n > 0$, on trouve $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante à partir du rang p et $u_n \geqslant u_p$ pour $n \geqslant p$. Mais alors u_n ne peut pas tendre vers 0 (sinon $0 \geqslant u_p > 0$), et la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $\ell < 1$, alors $\ell < \frac{\ell+1}{2}$, et il existe un rang p à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\ell+1}{2}$. Par récurrence, pour $n \geqslant p$,

$$0 < u_n \leqslant u_p \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-p}$$

Comme $\frac{\ell+1}{2} \in [0,1[$, la série géométrique $\sum_n u_p \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-p}$ converge. Par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire de général, puisqu'avec l'exemple de $u_n = \frac{1}{n}$, on a à la fois $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ diverge , tandis qu'avec l'exemple de $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a à la fois $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum u_n$ converge.

Théorème des séries alternées en page 4

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, et d'après le théorème des suites extraites, la suite (S_n) convergera.

$$\begin{array}{rcl}
S_{2n+1} - S_{2n} & = & (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \to 0 \\
S_{2(n+1)} - S_{2n} & = & (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \\
S_{2(n+1+1)} - S_{2n+1} & = & a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0
\end{array}$$

Tout fonctionne comme prévu. Approfondissons. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Par croissance de (S_{2n+1}) et décroissance de (S_{2n}), on a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$ (*).

Remarque : On peut ainsi programmer des valeurs approchées de S à une précision donnée.

L'encadrement précédent nous donne :

— $S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0$, soit $-a_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0$.

— Par décroissance de la suite (S_{2n}), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S \leqslant S_{2n+2}$. On reprend $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$ pour avoir $0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1}$, puis $0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant a_{2n+2}$.

Remarque : dans certains exercices, il nous faut le signe de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$, qui n'est pas rigoureusement un reste. Mais la propriété précédente s'étend : S est du signe de $(-1)^0 a_0$ (positif donc) et . En effet, on a par (*) :

$$0 \leqslant a_0 - a_1 = S_1 \leqslant S \leqslant S_0 = a_0$$

$-a_0 \leqslant R_0 \leqslant 0$.

Propriété 11

La convergence (absolue) de $\sum u_n$ a déjà été établie.

— Dans le cas où $u_n = O(w_n)$, il existe un réel M et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M w_n$. Pour $p \geqslant n_0$, par inégalité triangulaire en présence de séries absolument convergentes,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| \right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n| \leqslant M \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n$$

donc $R_n(u) = O(R_n(w))$.

— Dans le cas où $u_n = o(w_n)$, on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe M » par « pour tout $\varepsilon > 0$ ».

— Dans le cas où $u_n \sim w_n$, on utilise $u_n - w_n = o(w_n)$.

Propriété 12

La divergence de $\sum u_n$ a déjà été établie.

— Dans le cas où $u_n = O(w_n)$, il existe un réel M et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M w_n$.
Comme $\sum w_n$ diverge et est à termes positifs, on a : $(S_n(w))$ est croissante et divergente. Par le théorème de convergence monotone, $\lim S_n(w) = +\infty$. Il existe donc $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|S_{n_0}(u)| \leqslant M S_n(w)$. Pour $n \geqslant n_1$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |S_n(u)| & = & \left| S_{n_0}(u) + \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right| \\ & \leqslant & |S_{n_0}(u)| + \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \leqslant K S_n(w) + K \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} w_k \\ & \leqslant & 2K S_n(w) \text{ car les } w_k \text{ sont positifs} \end{array}$$

Donc $S_n(u) = O(S_n(w))$.

— Dans le cas où $u_n = o(w_n)$, on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe M » par « pour tout $\varepsilon > 0$ ».

— Dans le cas où $u_n \sim w_n$, on utilise $u_n - w_n = o(w_n)$.

Propriété 13

Démonstration : Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{C}$, alors $u_n - \ell = o(1)$. Comme $\sum 1$ diverge et $1 \geqslant 0$, la propriété de sommation dans le cas divergent donne :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = o(\sum_{k=0}^{n} 1) \text{ soit } \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\ell + o(n) \text{ puis } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \ell + o(1)$$

Et si $\lim u_n = \infty$, alors $1 = o(u_n)$. Par le même théorème, appliqué avec la référence $\sum u_n$ qui diverge et qui est à termes positifs à partir d'un certain rang (puisque $\lim u_n = +\infty$), on a

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = o(\sum_{k=0}^{n} u_k) \text{ soit } n+1 = o(\sum_{k=0}^{n} u_k)$$

On en déduit que $\lim \frac{n+1}{\sum_{k=0}^{n} u_k} = 0$, et comme les termes sont positifs pour n assez grand, $\lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.