

# Séries numériques et vectorielles

## Compléments sur les séries numériques (termes appartenant à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ )

1. Révisions de première année.
2. Technique de comparaison série-intégrale. Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, notamment dans le cas d'une fonction monotone, ou encore estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes.
3. Règle de d'Alembert.
4. Sommation des relations de comparaison ( $\sim$ ,  $O$ ,  $o$ ) : pour les restes dans le cas convergent, pour les sommes partielles dans le cas divergent. Cas particulier du théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

## Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

5. Vocabulaire : sommes partielles, convergence, divergence, restes, somme.
6. Propriétés étendues : linéarité de la somme, le terme général d'une série convergente tend vers 0, liens suite-série, séries télescopiques.
7. Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

## 1 Révisions sur les séries numériques

### Définition 1

On considère une suite réelle  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . On peut lui associer la suite de ses sommes partielles  $(S_n)_{n \geq n_0}$ , définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \quad \text{le plus souvent } S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{ou} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

De quelle *nature* est la série ?

- si la suite  $(S_n)$  diverge, on dit que la série  $\sum u_k$  diverge ;
- si la suite  $(S_n)$  converge, on dit que la série  $\sum u_k$  converge.

Dans le cas où la série  $\sum u_k$  converge, la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$  est appelée *somme de la série* et est

notée  $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$ . On définit la suite  $(R_n)_{n \geq n_0}$  des restes de la série par :

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Le *reste de rang  $n$  de la série* est ce qu'il reste à sommer quand on n'a sommé que jusqu'au rang  $n$ . Par propriété, quand la série converge, le reste tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. Changer les premiers termes de la série ne modifie pas sa nature.

## 1.1 propriétés pour des séries qui sont convergentes

### Propriété 1 – linéarité

Soient deux séries de terme général  $u_k$  et  $v_k$  convergentes, et  $\lambda$  et  $\mu$  réels.

Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente :  $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$  converge.

On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

On peut généraliser à une combinaison linéaire de séries comportant plus de deux séries.

### Propriété 2 – positivité et stricte positivité de la somme d'une série convergente

Soit  $\sum u_k$  une série **convergente**.

— Si pour tout  $k$ , on a  $u_k \geq 0$ , alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \geq 0$ .

— Si pour tout  $k$ , on a  $u_k > 0$ , alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ .

— Si pour tout  $k$ ,  $u_k \geq 0$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$ , alors : pour tout  $k$ ,  $u_k = 0$ .

### Propriété 3 – croissance de la somme pour des séries convergentes

Soient  $\sum u_k$  et  $\sum w_k$  deux séries **convergentes** telles que pour tout  $k$ ,  $u_k \leq w_k$ . On a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$$

### Définition - propriété 1 – convergence absolue

La série  $\sum u_k$  converge absolument lorsque  $\sum |u_k|$  converge.

Si une série converge absolument, alors cette série converge, et on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Une série peut être convergente sans être absolument convergente. C'est le cas de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  par exemple.

## 1.2 séries de référence

### Propriété 4 – séries de Riemann

La série  $\sum \frac{1}{k^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$

### Propriété 5 – séries géométriques

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série de terme général  $z^k$  est appelée série géométrique (de raison  $z$ ). Elle converge si et seulement si  $|z| < 1$  et dans ce cas, la somme de la série est :

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

### Propriété 6 – série exponentielle

Pour tout complexe  $z$ , la série de terme général  $\frac{z^n}{n!}$  converge et on a :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ .

## 1.3 comment utiliser les séries de référence pour étudier la nature d'une série ?

### Propriété 7 – théorèmes de comparaison

#### • Théorème de majoration-minoration

On suppose que  $0 \leq a_n \leq b_n$ .

- si la série de terme général  $a_n$  diverge alors la série de terme général  $b_n$  diverge ;
- si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Règle de domination

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n = O(b_n)$ .

Si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Règle de négligeabilité

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n = o(b_n)$ .

Si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Critère d'équivalence

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n \sim b_n$ .

La série de terme général  $a_n$  et la série de terme général  $b_n$  sont de même nature.

Exercice 1 :

Étudier la nature des séries de terme général suivant.

1.  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

3.  $c_n = \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$

2.  $b_n = \frac{\cos(n) + \sin(n)}{2^n}$

4.  $d_n = \frac{\ln(\ln(n))}{n\sqrt{n}}$

## 1.4 liens suite-série

### Propriété 8 – divergence grossière

Si la série  $\sum u_k$  converge, alors son terme général tend vers 0.

Par contraposée, si  $u_n$  ne tend pas vers 0, alors la série  $\sum u_k$  diverge. On parle dans ce cas de *divergence grossière*.

Démonstration :  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . Donc si la suite  $(S_n)$  converge, alors  $\lim u_n = 0$ .

La réciproque est fautive : la suite  $(\frac{1}{n})$  tend vers 0, mais la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge. Quand on veut prouver la convergence d'une série, la question n'est pas tant de savoir si le terme tend vers 0, mais plutôt à quelle vitesse !

### Propriété 9 – télescopage

La suite  $(u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum(u_{k+1} - u_k)$  converge.

Démonstration : Par télescopage,  $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ . Donc la suite  $(u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k))$  converge, si et seulement si la série  $\sum(u_{k+1} - u_k)$  converge.

Exercice 2 : En considérant  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ , montrer qu'il existe un réel  $\gamma$ , pour lequel

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

$\gamma$  est appelé constante d'Euler.

## 1.5 le critère des séries alternées

### Définition 2

On appelle *série alternée* toute série de la forme  $\sum(-1)^n a_n$  où  $(a_n)$  est une suite réelle de signe constant.

La plus connue de ces séries alternées est  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

### Théorème 1 – théorème des séries alternées

Si la suite  $(a_n)$  est décroissante et de limite nulle, alors la série  $\sum(-1)^n a_n$  converge.

On en déduit que  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

### Théorème 2 – théorème spécial des séries alternées

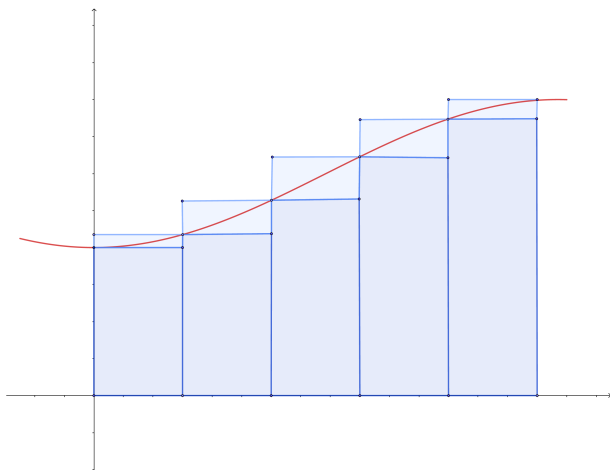
Si la suite  $(a_n)$  est décroissante et de limite nulle, alors la série  $\sum(-1)^n a_n$  converge. De plus,

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}$$

et  $R_n$  est du signe du premier terme « négligé », à savoir  $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ .

## 2 Technique de comparaison série-intégrale

Graphiquement, on comprend bien la méthode consistant à encadrer l'intégrale de  $f$  sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles (d'où le nom de méthode des rectangles). Voici une situation dans laquelle  $f$  est croissante.



On considère une série  $\sum f(n)$  où  $f$  est une fonction continue et monotone sur  $\mathbb{R}^+$ . On peut comparer les sommes partielles  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$  à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple,  $f$  est croissante, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in [k, k+1]$  :

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

Puis par croissance de l'intégrale sur  $[k, k+1]$ ,

$$\int_k^{k+1} f(k) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k+1) dt$$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour  $0 \leq k \leq n$  et celle de droite pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on obtient via la relation de Chasles :

$$f(0) + \int_0^n f(t) dt \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

On a des résultats analogues lorsque  $f$  est décroissante.

Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.

En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence). Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes !

 Exercice 3 : Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ .

 Exercice 4 : Montrer que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ .

Exercice 5 : Pour  $\alpha > 0$ , étudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ .

### 3 Règle de d'Alembert pour les séries numériques

#### Propriété 10

On suppose que  $\sum u_n$  est une série à termes strictement positifs à partir d'un certain rang et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$$

- Si  $\ell < 1$ , la série converge.
- Si  $\ell > 1$ , la série diverge grossièrement.
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire, il faut chercher une autre façon d'étudier la série.

Exercice 6 : Étudier les séries de terme général suivant.

$$1. a_n = \frac{n^4}{3^n}$$

$$3. c_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

$$2. b_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$$

$$4. \text{ pour } x \text{ réel, } d_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

De manière générale, la règle de d'Alembert est particulièrement adaptée aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances.

## 4 Sommation des relations de comparaison

### Propriété 11 – référence convergente positive et reste

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  deux séries, telles que  $\sum w_n$  est **convergente** et  $w_n \geq 0$ . On note respectivement  $R_n(u)$  et  $R_n(w)$  les restes de rang  $n$  de ces séries.

- Si  $u_n \sim w_n$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) \sim R_n(w)$ .
- Si  $u_n = o(w_n)$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = o(R_n(w))$ .
- Si  $u_n = O(w_n)$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = O(R_n(w))$ .

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang**.

### Propriété 12 – référence divergente positive et sommes partielles

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  deux séries, telles que  $\sum w_n$  est **divergente** et  $w_n \geq 0$ . On note respectivement  $S_n(u)$  et  $S_n(w)$  les sommes partielles de rang  $n$  de ces séries.

- Si  $u_n \sim w_n$  alors la série  $\sum u_n$  diverge et  $S_n(u) \sim S_n(w)$ .
- Si  $u_n = o(w_n)$  alors  $S_n(u) = o(S_n(w))$ .
- Si  $u_n = O(w_n)$  alors  $S_n(u) = O(S_n(w))$ .

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang**.

Exercice 7 : on reprend notre exercice de développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique. Soit  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ . On a vu que  $a_n = \gamma + o(1)$ .

$$1. \text{ En utilisant } \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}, \text{ donner un équivalent de } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

$$2. \text{ On a vu que } a_{k+1} - a_k \sim -\frac{1}{2k^2}. \text{ Qu'en déduit-on alors ?}$$

Exercice 8 : Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ .

### Propriété 13 – théorème de Cesàro

- Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

- Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite divergente de limite  $+\infty$ . On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démonstration : Si  $\lim u_n = \ell \in \mathbb{C}$ , alors  $u_n - \ell = o(1)$ . Comme  $\sum 1$  diverge et  $1 \geq 0$ , la propriété de sommation dans le cas divergent donne :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right) \text{ soit } \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)\ell + o(n) \text{ puis } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \ell + o(1)$$

Et si  $\lim u_n = \infty$ , alors  $1 = o(u_n)$ . Par le même théorème, appliqué avec la référence  $\sum u_n$  qui diverge et qui est à termes positifs à partir d'un certain rang (puisque  $\lim u_n = +\infty$ ), on a

$$\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) \text{ soit } n+1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

On en déduit que  $\lim \frac{n+1}{\sum_{k=0}^n u_k} = 0$ , et comme les termes sont positifs pour  $n$  assez grand,  $\lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ .

## 5 Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans toute cette section,  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de dimension finie.

### 5.1 notion de convergence et premières propriétés

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On peut définir la série de terme général  $u_n$  comme on en a l'habitude pour les suites numériques.

- On appelle somme partielle de rang  $n$  le terme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
- Lorsque la suite  $(S_n)$  converge (ce qui est indépendant de la norme choisie puisque nous travaillons en dimension finie), on dit que la série de terme général  $u_n$  converge et on appelle somme de la série la limite de la suite  $(S_n)$ . On note cette limite  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ . Cette somme est un élément de  $E$ , autrement dit un polynôme, une matrice, un endomorphisme...  
On peut encore définir le reste de rang  $n$  de la série, et ce reste tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.
- Les propriétés et situations classiques suivantes sont encore valables :
  - linéarité de la somme de séries convergentes,
  - si  $\sum u_n$  converge alors  $u_n$  tend vers 0 (et on parle encore de divergence grossière si  $u_n$  ne tend pas vers 0),
  - télescopes, liens suite-série.

### 5.2 deux apports majeurs de la dimension finie

Premier point : on peut utiliser une base de  $E$  (admis pour l'instant). Deuxième point : avec la notion de convergence absolue, on peut, pour établir une convergence, se ramener aux séries à termes positifs.

#### Propriété 14 – utilisation d'une base

Si  $E$  est muni d'une base  $(e_1, \dots, e_p)$ , la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si les séries de ses coordonnées,  $\sum u_n^{(k)}$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , convergent. Auquel cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)} \right) e_1 + \dots + \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)} \right) e_p$$

#### Définition 3

On dit que la série  $\sum u_n$  converge absolument si la série **numérique**  $\sum \|u_n\|$  converge.

La propriété suivante permet de ramener l'étude d'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé à une étude de série numérique à termes positifs.

#### Propriété 15

Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente. Et dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|$$

Exercice 9 : Étudier la convergence de la série de matrices  $\sum M_n$ , où  $M_n = \begin{pmatrix} e^{-n} & 0 \\ \frac{1}{n(n+1)} & \ln(1 + \frac{1}{n}) \end{pmatrix}$ , et en cas de convergence, donner sa somme.

### 5.3 série exponentielle de matrices

Exercice 10 : On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$ , on pose  $N(A) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ .

1. Montrer que  $N$  définit une norme sur  $E$ . On la note  $\|\cdot\|$  par la suite.
2. Vérifier que pour  $A$  et  $B$  dans  $E$ , on a  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ . Par récurrence, on obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$$

3. Montrer que la série  $\sum \frac{A^k}{k!}$  converge.

#### Définition - propriété 2

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la série  $\sum \frac{A^k}{k!}$  converge. Sa somme est appelée exponentielle de  $A$  et est notée :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Nous verrons dans le courant de l'année que lorsque  $A$  et  $B$  commutent, on a  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

Exercice 11 : Calculer l'exponentielle de la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



## 6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Règle de d'Alembert en page 5

• Si  $\ell > 1$ , à partir d'un certain rang  $p$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ . Comme  $u_n > 0$ , on trouve  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite  $u$  est donc croissante à partir du rang  $p$  et  $u_n \geq u_p$  pour  $n \geq p$ . Mais alors  $u_n$  ne peut pas tendre vers 0 (sinon  $0 \geq u_p > 0$ ), et la série  $\sum u_n$  diverge.

• Si  $\ell < 1$ , alors  $\ell < \frac{\ell+1}{2}$ , et il existe un rang  $p$  à partir duquel  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ . Par récurrence, pour  $n \geq p$ ,

$$0 < u_n \leq u_p \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-p}$$

Comme  $\frac{\ell+1}{2} \in [0, 1]$ , la série géométrique  $\sum_n u_p \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-p}$  converge. Par le théorème de comparaison,  $\sum u_n$  converge.

• Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire de général, puisqu'avec l'exemple de  $u_n = \frac{1}{n}$ , on a à la fois  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  diverge, tandis qu'avec l'exemple de  $u_n = \frac{1}{n^2}$ , on a à la fois  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  converge.

### Théorème des séries alternées en page 4

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de limite nulle. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Montrons que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, et d'après le théorème des suites extraites, la suite  $(S_n)$  convergera.

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \rightarrow 0 \\ S_{2(n+1)} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \\ S_{2(n+1+1)} - S_{2n+1} &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \end{aligned}$$

Tout fonctionne comme prévu. Approfondissons. Notons  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ .

Par croissance de  $(S_{2n+1})$  et décroissance de  $(S_{2n})$ , on a  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ .

Remarque : On peut ainsi programmer des valeurs approchées de  $S$  à une précision donnée.

L'encadrement précédent nous donne :

- $0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1}$ , soit  $0 \leq R_{2n+1} \leq a_{2n+1}$ ,
- $S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$ , soit  $-a_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$ . Comme  $a$  décroît,  $a_{2n+1} \leq a_{2n}$ , et donc  $-a_{2n} \leq R_{2n} \leq 0$ .

### Propriété 11

La convergence (absolue) de  $\sum u_n$  a déjà été établie.

- Dans le cas où  $u_n = O(w_n)$ , il existe un réel  $M$  et un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq M w_n$ . Pour  $p \geq n_0$ , par inégalité triangulaire en présence de séries absolument convergentes,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| \right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n| \leq M \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n$$

donc  $R_n(u) = O(R_n(w))$ .

- Dans le cas où  $u_n = o(w_n)$ , on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe  $M$  » par « pour tout  $\varepsilon > 0$  ».
- Dans le cas où  $u_n \sim w_n$ , on utilise  $u_n - w_n = o(w_n)$ .

### Propriété 12

La divergence de  $\sum u_n$  a déjà été établie.

- Dans le cas où  $u_n = O(w_n)$ , il existe un réel  $M$  et un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq M w_n$ . Comme  $\sum w_n$  diverge et est à termes positifs, on a :  $(S_n(w))$  est croissante et divergente. Par le théorème de convergence monotone,  $\lim S_n(w) = +\infty$ . Il existe donc  $n_1 \geq n_0$  tel que pour  $n \geq n_1$ ,  $|S_{n_0}(u)| \leq M S_n(w)$ . Pour  $n \geq n_1$ , on a :

$$\begin{aligned} |S_n(u)| &= \left| S_{n_0}(u) + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right| \\ &\leq |S_{n_0}(u)| + \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| \leq M S_n(w) + M \sum_{k=n_0+1}^n w_k \\ &\leq 2M S_n(w) \text{ car les } w_k \text{ sont positifs} \end{aligned}$$

Donc  $S_n(u) = O(S_n(w))$ .

- Dans le cas où  $u_n = o(w_n)$ , on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe  $M$  » par « pour tout  $\varepsilon > 0$  ».

— Dans le cas où  $u_n \sim w_n$ , on utilise  $u_n - w_n = o(w_n)$ .

### Propriété 15

Soient  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et une série absolument convergente de terme général  $u_n$ .

- On considère une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E$ . Tout vecteur se décompose dans cette base :

$$\forall x \in E, \exists (x^{(1)}, \dots, x^{(p)}) \in \mathbb{K}^p, x = x^{(1)}e_1 + x^{(2)}e_2 + \dots + x^{(p)}e_p$$

On pose  $\|x\| = \max(|x^{(1)}|, \dots, |x^{(p)}|)$ . On montre facilement que l'on définit ainsi une norme sur  $E$ .

- Montrer que la série  $\sum u_n$  converge revient, comme nous l'avons dit et admis, à montrer que les séries de coordonnées convergent. Or, pour  $i$  compris entre 1 et  $p$ , on a  $0 \leq |u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|$ , et par hypothèse, la suite numérique  $\sum \|u_n\|$  converge. Donc la suite numérique  $\sum_n u_n^{(i)}$  converge absolument donc converge.

Finalement,  $\sum u_n$  converge.