Réduction (1)

Ce premier chapitre consacré à la réduction vise à énoncer des premiers critères simples de diagonalisabilité et de trigonalisabilité. Il sera complété d'un deuxième chapitre où nous verrons comment les polynômes d'endomorphismes peuvent être mis efficacement au service de la réduction.

Éléments propres

1. Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.
2. Droite stable par un endomorphisme.
3. Valeur propre, vecteur propre, espace propre. En dimension finie : spectre.
4. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
5. Un endomorphisme d'un espace E de dimension finie admet au plus $\dim E$ valeurs propres.
6. Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Polynôme caractéristique (endomorphismes en dimension finie et matrices carrées)

7. Polynôme caractéristique, unitaire. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
8. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
9. Les valeurs propres de u (de A) sont les racines de χ_u (χ_A).
10. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
11. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension de l'espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.

Diagonalisabilité (endomorphismes en dimension finie et matrices carrées)

12. Définition de la diagonalisabilité pour u, pour A.
13. Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité, l'une d'entre elles faisant intervenir χ_u.
14. Deux conditions suffisantes de diagonalisabilité, l'une sur χ_u, l'autre sur le nombre de valeurs propres.

Trigonalisabilité (endomorphismes en dimension finie et matrices carrées)

15. Définition pour un endomorphisme, pour une matrice.
16. Quand u est trigonalisable, identifier des sous-espaces stables dans la trigonalisation de u.
17. Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
18. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable (resp. une matrice trigonalisable).

Nilpotence (endomorphismes en dimension finie et matrices carrées)

19. Définition pour un endomorphisme, pour une matrice.
20. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
21. Caractérisation des endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
22. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

Ne pas oublier de maîtriser les applications usuelles (pour l'oral notamment !)

---

u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf mention explicite du contraire.

1 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension quelconque

Motivation :

Dans le cas où E est de dimension finie, on cherche s'il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ...b_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Cela serait en effet bien commode pour calculer les puissances de u par exemple. Si une telle base existe, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'existence d'un scalaire λ_i tel que $u(b_i) = \lambda_i b_i$, ce qui motive les définitions suivantes.

1.1 vocabulaire

Définition 1

Le scalaire λ est *valeur propre* de u s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas, x est appelé *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ.
Quand E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé *spectre* de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

On remarque que $u(x) = \lambda x$ si et seulement si $u(x) - \lambda\,\mathrm{Id}(x) = 0$ si et seulement si $(u - \lambda\,\mathrm{Id})\,(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \\ &\iff u - \lambda\,\mathrm{Id} \ \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

en particulier :

$$0 \in \mathrm{Sp}\, f \iff f \ \text{ n'est pas injectif}$$

Définition 2

Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel de E donné par

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id})$$

est appelé *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ.
Si λ n'est pas valeur propre de u, on peut convenir que $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

On reconnaît en particulier $E_0(u) =$ et $E_1(u) =$

$$E_\lambda(u) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } u \\ \{0\} \cup \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} & \text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } u \end{cases}$$

Exercice 1 : Montrer qu'une droite est stable par l'endomorphisme u si, et seulement si, elle est engendrée par un vecteur propre de u.

Exercice 2 : Montrer que tout sous-espace propre de u associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}\, u$.

Méthode – équation aux élements propres

Pour rechercher les éléments propres d'un endomorphisme u (valeurs propres et sous-espaces propres associés), on peut résoudre l'équation $u(x) = \lambda x$, appelée *équation aux éléments propres*.

Exercice 3 : En étudiant l'équation aux éléments propres, déterminer les éléments propres de u, où u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ donné par $u(P) = XP'$.

Exercice 4 : Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et F l'endomorphisme de E qui à la suite a, associe la suite b donnée par

$$b_0 = a_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

En étudiant l'équation aux éléments propres, déterminer les éléments propres de F.

✎ Exercice 5 : **questions classiques de stabilité**

1. Montrer que les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u sont stables par u. Quel est l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$?
2. Si u et w commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables par w. Cette propriété est au programme.

Propriété 1

Si u et w commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables pas w.

1.2 propriétés des espaces propres

Propriété 2

Des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe.

Propriété 3

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.

2 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie, éléments propres d'une matrice

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3

• On dit qu'une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
• On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.
Dans chacun de ces deux cas, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
On appelle *spectre* de A, et note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition 4

On note $E_\lambda(A)$ ou $\ker(A - \lambda I_n)$ l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, et on appelle cet ensemble *espace propre* de A associé à la valeur propre λ.

$$E_\lambda(A) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda \notin \mathrm{Sp}(A) \\ \{0\} \cup \{\text{vecteurs propres de } A \text{ associés à } \lambda\} & \text{si } \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \end{cases}$$

Comme $u(x) = \lambda x$ s'écrit matriciellement $AX = \lambda X$, nous avons des liens entre les éléments propres de u et les éléments propres de toute matrice de u.

Propriété 4

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. On a :

- $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$
- x est vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.
- $x \in E_\lambda(u)$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(A)$.

Pour un endomorphisme en dimension finie, on a l'équivalence entre l'injectivité et la bijectivité. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad & \underset{\text{définition}}{\Leftrightarrow} \quad u - \lambda\,\mathrm{Id} \ \text{ n'est pas injectif} \\
& \underset{E \text{ est de dimension finie}}{\Leftrightarrow} \quad u - \lambda\,\mathrm{Id} \ \text{ n'est pas bijectif} \\
& \Leftrightarrow \quad \det(u - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0
\end{aligned}$$

Pour rechercher les valeurs propres d'une matrice, on peut utiliser les approches équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists X \neq 0 \mid AX = \lambda X \text{ ou } (A - \lambda I_n)X = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0
\end{aligned}$$

De plus, par le théorème du rang adapté (en repassant à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A) :

$$\dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$$

Propriété 5

- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.
- Lorsque $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale avec les d_k tous distincts, on a de plus les espaces propres :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ E_{d_k}(D) = \mathrm{Vect}(E_k)$$
où E_k est le vecteur colonne ne comportant que des 0 sauf un 1 en k-ième ligne.

Exercice 6 : Donner les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Propriété 6

- $u \in \mathscr{L}(E)$ admet au plus $(\dim E)$ valeurs propres. A d'ordre n admet au plus n valeurs propres.
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \right) \leqslant \dim E$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leqslant n$.
- Si A a autant de valeurs propres que sa taille, tous ses espaces propres sont de dimension 1.

3 Polynôme caractéristique

Nous venons de voir que la détermination de l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie pouvait se ramener à un simple calcul de déterminant de matrice
$\det(A-\lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - A_n)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'expression :

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

est une expression polynomiale en λ. Passer au polynôme $\det(XI_n - A)$ fait travailler avec des matrices à coefficients dans le corps des fractions $\mathbb{K}(X)$. Nous admettons que la théorie du déterminant exposée pour le corps $\mathbb{K}$ reste valable dans $\mathbb{K}(X)$. Une autre possibilité est de repasser par les fonctions polynomiales associées.

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A, et on note χ_A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

C'est l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

✎ Exercice 7 : Donner le polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 2, d'une matrice triangulaire. Ces résultats sont à connaître.

Propriété 7

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition - propriété 1

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. On appelle *polynôme caractéristique* de u le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ égal à χ_A où A est n'importe quelle représentation matricielle de u.

Propriété 8 – coefficients remarquables

Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{partie qui n'est pas à connaître}} + (-1)^n \det(A)$$

Théorème 1

Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.
Les valeurs propres de $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie, sont exactement les racines de χ_u.

— Nous retrouvons qu'une matrice d'ordre n admet au plus n valeurs propres (χ_A est de degré n dont χ_A admet au plus n racines).

— Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité (c'est-à-dire qu'une valeur propre est comptée autant de fois que son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A).

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les valeurs propres complexes de A vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont conjuguées deux à deux.

Méthode – Déterminer les éléments propres d'une matrice

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice M, il suffit de :

1. calculer χ_M,
2. déterminer les racines de χ_M, ce qui fournit $\mathrm{Sp}(M)$,
3. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, résoudre l'équation $MX = \lambda X$, ce qui fournit $E_\lambda(M)$.

Méthode – Éléments propres de u en dimension finie

Pour déterminer les éléments propres d'un endomorphisme u d'un espace de dimension finie, il suffit de :

1. déterminer la matrice M de u dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E,
2. déterminer les éléments propres de M,
3. revenir à u :
   — $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M)$ (facile !)
   — $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(M)\}$ (attention à bien revenir dans E !)

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto nXP - (X^2 - 1)P'$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, \ldots, (X-1)^n)$ est une base de E.
2. Donner la matrice de f dans cette base. En déduire les valeurs propres de f.
3. Dans le cas $n = 2$, redonner la matrice de f. Déterminer les espaces propres de f. Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 6

On appelle *ordre de multiplicité de la valeur propre* λ de A, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A. On la note $m(\lambda)$.

De même, on appelle *ordre de multiplicité de la valeur propre* λ de u, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u.

Rappels : α est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ d'ordre de multiplicité m si et seulement si une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$
2. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Par exemple, pour $P = (X-2)^3(X^2+1)^2(X-1)$, 1 est racine simple, 2 est racine d'ordre 3, (i et $-$i sont racines doubles). Avec les propriétés du chapitre Polynômes, nous avons la propriété suivante.

Propriété 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Deux valeurs propres complexes conjuguées de A vue comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même ordre de multiplicité.

Propriété 10 – endomorphisme induit

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit, χ_{u_F}, divise χ_u.

Propriété 11

- Pour toute valeur propre λ, on a

$$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$$

- En particulier, si λ est racine simple de χ_u ou χ_A, alors $\dim E_\lambda = 1$.

5 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans toute cette section, E est un espace de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Définition 7

L'endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Les homothéties ($u : x \mapsto \alpha x$), et en particulier, $0_{\mathscr{L}(E)}$ et Id, sont diagonalisables car dans toute base, leur matrice est diagonale.

Exercice 9 : Montrer que les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ telle que $\mathrm{mat}_B(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ldots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Pour tout i, $u(b_i) = \lambda_i b_i$ et b_i, vecteur de base, est non nul. Donc les b_i sont des vecteurs propres, et les λ_i sont les valeurs propres de u (il peut y avoir répétition, mais on a là n valeurs propres comptées avec multiplicité).

> *Diagonaliser un endomorphisme*, c'est, sous réserve que ce soit possible, déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Par formule de changement de bases,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = P\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} \quad \text{avec } P \text{ matrice de passage de } \mathcal{C} \text{ à } \mathcal{B}$$

et la matrice de u dans une base quelconque est alors semblable à une matrice diagonale. D'où ce qui suit :

Définition 8

On dit qu'une *matrice est diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

Diagonaliser $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est, sous réserve que ce soit possible, trouver $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 10 : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Théorème 2 – conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable
2. il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u
3. E est somme directe des sous-espaces propres de u : $\quad E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$
4. $\dim E = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$
5. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

Le théorème s'adapte facilement pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle qu'un polynôme P est *scindé* sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par exemple, $\sqrt{2}(X-1)^3(X+5)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ mais $\sqrt{2}(X^2+1)(X+5)$ ne l'est pas.

Remarque : Si u est diagonalisable, notons $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Alors

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$$

Cette écriture s'appelle *la décomposition spectrale de u*.

Propriété 12 – conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

1. u possède n valeurs propres distinctes
2. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples

alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.

Il s'agit d'une condition suffisante mais pas nécessaire. Par exemple, $3\,\mathrm{Id}_E$ est diagonalisable mais possède 3 comme unique valeur propre et son polynôme caractéristique $(X-3)^n$ admet 3 comme racine de multiplicité n.

Méthode – diagonalisation de M

Connaître une méthode ne dispense pas de réfléchir !

- Étude de la diagonalisabilité.
  — Déterminer χ_M.
  — Si χ_M n'est pas scindé, M n'est pas diagonalisable. Dans $\mathbb{C}$, χ_M est toujours scindé.
  — Si χ_M est scindé, on peut déterminer $\dim E_\lambda(M)$, soit par le théorème du rang adapté, soit en déterminant $E_\lambda(M)$, et le comparer à $m(\lambda)$.
- Diagonalisation.
  On détermine une base des $E_\lambda(M)$, par résolution de $MX = \lambda X$ ou par astuce. On forme la matrice P dont les colonnes sont les bases de ces espaces propres, et D la matrice diagonale constituée des valeurs propres de M **dans le même ordre**.
  Par diagonalisation, $M = PDP^{-1}$.

En Python, la commande `al.eig` permet d'obtenir les valeurs propres d'une matrice et des vecteurs propres associés aux valeurs propres.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[1,2],[1,2]])
[L,P] = al.eig(A)
print(A)
print(L)
print(P)
```

```
[[1  2]
 [1  2]]
[0.  3.]
[[-0.89442719  -0.70710678]
 [ 0.4472136   -0.70710678]]
```

Théorème 3 – (admis pour l'instant)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 11 : Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 : Montrer que $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

✎ Exercice 13 : Soient u et w deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose u diagonalisable. Montrer que u et w commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par w.

6 Trigonalisabilité

Là encore, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Définition 9

Un endomorphisme u de E est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Une matrice est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarques :

— Trigonaliser u, c'est, lorsque c'est possible, trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Trigonaliser une matrice M, c'est, lorsque c'est possible, trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = PTP^{-1}$.

— Par les formules de changement de bases, on peut montrer que u est trigonalisable si et seulement si toute matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable.

— S'il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, alors la matrice de u dans la base $(b_n, \ldots, b_1)$ est triangulaire inférieure. Et réciproquement. Donc on aurait pu donner comme définition : un endomorphisme u de E est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

— Interprétation géométrique : dire que la matrice de u dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ est triangulaire supérieure revient à dire que pour tout i, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ est stable par u.

— Le premier vecteur d'une éventuelle base de trigonalisation de u est un vecteur propre de u.

Théorème 4

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Conséquence : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, et tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Propriété 13

Soit u un endomorphisme trigonalisable. La trace et le déterminant de u sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.
La trace et le déterminant d'une matrice trigonalisable sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

Remarques :

— C'est a fortiori valable pour un endomorphisme diagonalisable et une matrice diagonalisable.

— Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le résultat qui précède s'applique automatiquement. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut voir A comme matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ et affirmer que $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$ sont la somme et le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité.

Conformément au programme, la pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif en soi. Voici deux exemples.

Exercice 14 : Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Après calculs, on a $\chi_M = (X+2)(X-1)^2$, $\mathrm{Sp}(M) = \{-2, 1\}$,

$E_{-2} = \mathrm{Vect}(1,0,1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$. Trigonaliser M.

Exercice 15 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet une seule valeur propre et déterminer l'espace propre associé. Trigonaliser A.
Il y a beaucoup de réponses possibles ! Si vous avez mené un autre raisonnement, comment vous vérifier ? Avec Python. Vous effectuez le calcul matriciel PTP^{-1} et vous vérifiez que vous retrouvez A.

7 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 10

Un endomorphisme u de E est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On appelle alors *indice de nilpotence* de u le plus petit de ces entiers.

Remarques :

— Si $E \neq \{0\}$, l'indice de nilpotence vaut au moins 1 puisque $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

— Si l'on note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent u, $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

— On définit de façon analogue la propriété de nilpotence d'une matrice.

— Si $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors par linéarité de u, pour tout $k \geqslant p$, $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

— Il existe des endomorphismes et matrices non nilpotents. Par exemple :

Exercice 16 : Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Exercice 17 : $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. On admet que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$.
Donner le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P. En déduire que Δ est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

Exercice 18 : Soit $n \geqslant 2$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 0, hormis des 1 en sur-diagonale.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Donner l'indice de nilpotence de A.
3. En utilisant la propriété 14, en déduire qu'il n'existe aucune matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

Propriété 14

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est inférieur ou égal à $\dim E$.

Propriété 15

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable et si 0 est sa seule valeur propre.

Corollaire 1

- Un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension n est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$.
- Une matrice A d'ordre n est nilpotente si, et seulement si, $\chi_A = X^n$.

8 Quelques applications de la réduction matricielle

8.1 calculs de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à calculer les puissances A^p, $p \in \mathbb{N}$, par réduction de A.

- Si A est diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. On a $A^p = PD^pP^{-1}$, et D^p s'obtient facilement en élevant ses coefficients diagonaux à la puissance p.
- Si A n'est pas diagonalisable, on peut, quitte à la considérer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la trigonaliser et écrire $A^p = PT^pP^{-1}$. Il restera à se débrouiller pour avoir les puissances de T.

Exercice 19 (travail personnel) : Exercice 1 de l'épreuve CCINP 2 2024.

8.2 système d'équations différentielles

Nous y reviendrons au chapitre Équations différentielles.

8.3 recherche d'un commutant

Exercice 20 (B.E.O.) : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

9 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Propriété 2

Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, montrons $\mathcal{P}_m$: « la somme de m sous-espaces propres de u est directe ».
Pour $\mathcal{P}_1$, il n'y a rien à montrer.
Supposons la propriété établie au rang $m \geqslant 2$.
Soit $E_{\lambda_1}(u), \dots E_{\lambda_m}(u), E_{\lambda_{m+1}}(u)$ des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
Soient $x_1, \dots, x_{m+1}$ dans $E_{\lambda_1}(u) \times E_{\lambda_m}(u) \times E_{\lambda_{m+1}}(u)$ vérifiant $x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} = 0_E$
En composant par u linéaire, on obtient une deuxième équation :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} & = 0_E \\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} & = 0_E \end{cases}$$

Avec $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_{m+1} L_1$, on obtient $(\lambda_1 - \lambda_{m+1})x_1 + \cdots + (\lambda_m - \lambda_{m+1})x_m = 0_E$. Cette équation est de la forme $y_1 + \cdots + y_m = 0_E$ avec $y_k = (\lambda_k - \lambda_{m+1})x_k \in E_{\lambda_k}(u)$. Par hypothèse de récurrence, les espaces $E_{\lambda_1}(u), \dots E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe donc

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ y_k = 0_E \text{ puis } \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{m+1})}_{\neq 0} x_k = 0_E \text{ soit } x_k = 0_E$$

Enfin, en reprenant L_1 plus haut, on a aussi $x_{m+1} = 0_E$.

Propriété 3

- Cas d'une famille finie :

Soit $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distinctes. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0_E$.
Pour tout k, $\lambda_k x_k \in E_{\lambda_k}(u)$ et les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe, par la propriété précédente. Donc $\lambda_k x_k = 0_E$ pour tout k. Enfin, $x_k \neq 0_E$ (car c'est un vecteur propre) donc $\lambda_k = 0$.

- Cas d'une famille infinie :

Celle-ci est libre car ses sous-familles finies le sont par le premier point.

Propriété 6

On sait que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. Or les familles libres de E ont au plus $\dim E$ vecteurs. Donc il y a au plus $\dim E$ valeurs propres.
On sait que les espaces propres sont en somme directe, donc immédiatement,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \right) \leqslant \dim E$$

Ce qui se transmet aux matrices : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leqslant n$. Comme les sous-espaces propres sont non réduits à $\{0\}$, ils sont de dimension au moins 1, et nous avons

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} 1 \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leqslant n$$

Dans le cas où A admet n valeurs propres, on obtient $n \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) \leqslant n$, et toutes les inégalités sont des égalités, et donc $\dim E_\lambda(A) = 1$ pour toute valeur propre λ.

Propriété 7

Soient A et B matrices semblables d'ordre n. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. On a
$\lambda I_n - B = \lambda P^{-1} I_n P - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$. Donc $\lambda I_n - B$ et $\lambda I_n - A$ sont semblables et ont même déterminant.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$, et donc $\chi_A = \chi_B$.

Propriété 8

- Le plus facile est d'établir le coefficient constant de χ_A, qui est aussi sa valeur en 0.

$$\chi_A(0) = \det(0 I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, par formule du déterminant matriciel, $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})$.

On note $P_\sigma(X) = \prod_{i=1}^{n} (X \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})$ pour $\sigma \in S_n$.

Dans le cas où $\sigma = \mathrm{Id}$, on a $P_\sigma(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$ et P_σ est de degré n, de coefficient dominant 1, et de terme en

X^{n-1} égal à $-\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = -\operatorname{Tr}(A)$.

$$P_{\mathrm{Id}}(X) = X^n - \operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \text{ termes de degré inférieur ou égal à } n-2$$

Dans le cas où $\sigma \neq \mathrm{Id}$, il existe k tel que $\sigma(k) \neq k$. Et comme $k \in \operatorname{Im}\sigma$ (σ est surjective), il existe j tel que $\sigma(j) = k \neq j$. Il y a donc au moins deux symboles de Kronecker $\delta_{\sigma(i),i}$ qui sont nuls. Et donc P_σ est de degré inférieur ou égal à $n-2$.

Propriété 10

Soit F un sous-espace de E stable par u. On considère $\mathcal{B}_F$ une base de F, complétée en $\mathcal{B}$ base de E. En notant $p = \dim F$, on a :

$$M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \text{ et } \chi_u(X) = \chi_M(X) = \left|\begin{array}{c|c} XI_p - \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) & -A \\ \hline 0 & XI_{n-p} - B \end{array}\right|$$

Par déterminant triangulaire par blocs, $\chi_u(X) = \chi_{u_{|F}}(X)\chi_B(X)$.

Propriété 11

E_λ est stable par u donc par la propriété précédente, $\chi_{u_{|E_\lambda}}$ divise χ_u. Or $u_{|E_\lambda} = \lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda}$ (ou encore, la matrice de $u_{|E_\lambda}$ dans n'importe quelle base est $\lambda I_{\dim E_\lambda}$), donc

$$\chi_{u_{|E_\lambda}} = \begin{vmatrix} X-\lambda & & & (0) \\ & X-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & X-\lambda \end{vmatrix} = (X-\lambda)^{\dim E_\lambda}$$

donc $(X-\lambda)^{\dim E_\lambda}$ divise χ_u et $\dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$.

Théorème 2

- (1) $\Rightarrow$ (2). On l'a expliqué plus haut.

- (2) $\Rightarrow$ (3). On suppose qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u. On note $(v_1, \dots, v_n)$ une telle base.

Soit $x \in E$. Il s'écrit $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.
Pour tout i, v_i est un vecteur propre donc appartient à un certain $E_\mu(u)$ et donc à $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Donc $E \subset \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, puis $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. On a vu à la propriété 2 que les espaces propres sont en somme directe, donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

- (3) $\Rightarrow$ (4). On part de $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Dans une somme directe, les dimensions s'ajoutent, donc $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.

- (4) $\Rightarrow$ (5). On suppose que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$.

Par la propriété 11, $\dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$ pour toute valeur propre. Sommons, avec (4) :

$$n \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda)$$

Par ailleurs, puisque $\{\text{racines de } \chi_u\} = \mathrm{Sp}(u)$, χ_u se factorise en $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)} Q$, où Q est sans racine dans $\mathbb{K}$.

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) \leqslant \deg(\chi_u) = n$$

Finalement,

$$n \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) \leqslant n$$

Il y a donc égalité et chaque inégalité intervenue est une égalité. Pour tout λ, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$, et aussi χ_u unitaire de degré n se factorise en $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$. χ_u est donc scindé.

- (5) $\Rightarrow$ (1).

Comme χ_u est scindé et que $\{\text{racines de } \chi_u\} = \mathrm{Sp}(u)$, on a $n = \deg \chi_u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda)$. Par hypothèse (5), $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$, donc

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$$

Comme les espaces propres sont en somme directe, on a $\dim \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \dim E$, et donc $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$. La matrice dans une base adaptée à cette somme est diagonale.

Propriété 12

- Supposons (1). u possède n valeurs propres distinctes et on sait (propriété 6) que les espaces propres de u sont de dimension 1. Donc

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} 1 = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) = n$$

et u est diagonalisable.
De plus, comme χ_u est de degré n et que $\mathrm{Sp}(u) = \{\text{racines de } \chi_u\}$, on a n racines pour un polynôme de degré n, qui est donc scindé à racines simples.

- Supposons (2). χ_u est scindé à racines simples, et de degré n, donc χ_u admet n racines, et u admet donc n valeurs propres distinctes.

Théorème 4

Démonstration typique du chapitre.

- (u trigonalisable) $\Rightarrow$ (χ_u scindé)

Supposons u trigonalisable. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \dots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Donc χ_u est scindé. À noter : les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de u comptées avec multiplicité.

- (χ_u scindé) $\Rightarrow$ (u trigonalisable)

Raisonnons par récurrence sur la dimension de E, pour montrer $\mathcal{P}_n$: « tout endomorphisme en dimension n est trigonalisable ».
Le résultat est vrai en dimension 1 puisque toute matrice représentative d'un endomorphisme en dimension 1 est triangulaire supérieure.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$.
Le polynôme caractéristique de u étant scindé et de degré $n+1$, il admet au moins une racine λ. Les racines de χ_u sont les valeurs propres de u, donc λ est valeur propre. En notant e_1 un vecteur propre associé, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ de E, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

Par déterminants par blocs, $\chi_u = (X - \lambda)\chi_A$ et comme χ_u est scindé, χ_A l'est aussi. Par hypothèse de récurrence appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a l'existence de T triangulaire supérieure et P inversible telles que $A = PTP^{-1}$.
Introduisons $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$. Par produits par blocs, $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & PP^{-1} \end{array}\right) = I$ et Q est inversible d'inverse $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)$. On a

$$Q^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array}\right)Q = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & P^{-1}A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & (*) \\ \hline 0 & P^{-1}AP \end{array}\right)$$

et comme $P^{-1}AP = T$, cette dernière matrice est triangulaire supérieure.

Propriété 13

Une façon de rédiger

Soit u trigonalisable de valeurs propres comptées avec multiplicité $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ou, sans répétition, $r_1, \dots, r_d$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_u = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n) = (X - r_1)^{m_1}\dots(X - r_d)^{m_d}$$

Une des représentations matricielles de u est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et par lecture de cette matrice triangulaire,

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Tr}(u) & = & \lambda_1+\cdots+\lambda_n = m_1r_1+\cdots+m_dr_d \\ \det(u) & = & \lambda_1\times\cdots\times\lambda_n = r_1^{m_1}\times\cdots\times r_d^{m_d}\end{array}$$

Une autre façon de rédiger
D'une part, on a vu que pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\chi_A(X)=X^n-\operatorname{Tr}(A)X^{n-1}+\underbrace{\cdots\cdots}_{\text{partie qui n'est pas à connaître}}+(-1)^n\det(A)$$

D'autre part, comme A est trigonalisable, χ_A est scindé, égal à $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$. En développant :

$$\chi_A(X)=X^n-(\sum_{i=1}^n\lambda_i)X^{n-1}+\cdots+(-1)^n\prod_{i=1}^n\lambda_i$$

Il n'y a plus qu'à identifier. Il ne faudra pas oublier de compter les racines avec multiplicité.

Propriété 14

Démonstration importante. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ d'indice de nilpotence p.
Comme f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $x\in E$ tel que $f^{p-1}(x)\neq 0$.
Montrons la liberté de la famille $(f^{n-1}(x),f^{n-2}(x),\dots,f(x),x)$. Soient $a_{p-1},a_{p-2},\dots,a_0$ des réels tels que

$$a_{p-1}f^{p-1}(x)+a_{p-2}f^{p-2}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0x=0$$

On compose par f^{p-1} application linéaire :

$$a_{p-1}f^{2p-2}(x)+a_{p-2}f^{2p-3}(x)+\cdots+a_1f^p(x)+a_0f^{p-1}(x)=0$$

Comme $f^p=0$, pour tout entier $k\geqslant p$, $f^k=f^p\circ f^{k-p}=0$. On a donc ici $a_0f^{p-1}(x)=0$. Comme $f^{p-1}(x)\neq 0$, on a $a_0=0$.
On a alors

$$a_{p-1}f^{p-1}(x)+a_{p-2}f^{p-2}(x)+\cdots+a_1f(x)=0$$

En composant par f^{p-2}, on obtient de même $a_1=0$. On réitère le procédé jusqu'à avoir $a_{p-2}=0$, et $a_{p-1}f^{p-1}(x)=0$. On trouve alors $a_{p-1}=0$.
Tous les scalaires sont nuls. La famille est libre.
Les familles libres de E ont au plus $\dim E$ vecteurs, donc $p\leqslant\dim E$.

Propriété 15

Exercice d'introduction :

1. Soit $M=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Que remarquez-vous dans le calcul des puissances de M ?
2. Soit $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle (on dit que T est triangulaire supérieure stricte). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice T dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Que dire de $\operatorname{Im}u^k$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$? En déduire $\operatorname{Im}u^n$, puis T^n.

- On suppose que u est nilpotent.

Soit M une de ses matrices. M est nilpotente. On regarde M comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. $MX=\lambda X$ donc $M^2=\lambda MX=\lambda^2X$, et par récurrence, $M^kX=\lambda^kX$.
En particulier, $0=M^nX=\lambda^nX$. Comme $X\neq 0$, on a $\lambda=0$. La seule valeur propre complexe de M est 0.
Donc $\chi_M=X^n$ (unitaire, de degré n et de seule racine 0).
Donc χ_M est scindé (sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$), et la matrice M est trigonalisable. Et on a vu au passage que la seule valeur propre de M était 0.

- On suppose que u est trigonalisable et que 0 est la seule valeur propre de u.

Il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E dans laquelle $\operatorname{mat}(u)=T=\begin{pmatrix}0&*&*\\ \vdots&\ddots&*\\0&\dots&0\end{pmatrix}$. Par récurrence finie, pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $\operatorname{Im}u^k\subset\operatorname{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_{n-k})$.
On a donc $\operatorname{Im}u^{n-1}\subset\operatorname{Vect}(e_1)$, puis $\operatorname{Im}u^n\subset\{0\}$, et $u^n=0$.