

# Espaces vectoriels normés

## – première partie –

1. Révisions sur la borne supérieure. Pour  $\alpha \geq 0$ ,  $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ .
2. Norme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Distance associée à une norme. Inégalités triangulaires. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.
3. Vecteurs unitaires.
4. Boules fermées, ouvertes, sphères. Convexité des boules.
5. Parties, suites, fonctions bornées.
6. Sur  $\mathbb{K}^n$  : normes 1, 2 et infinie.
7. Sur l'espace des fonctions bornées et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  : norme de la convergence uniforme.
8. Sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes : norme de la convergence en moyenne et norme de la convergence en moyenne quadratique.
9. Produit fini d'espaces vectoriels normés.
10. Suites d'éléments de  $E$ , espace vectoriel normé :
  - Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les limites.
  - Caractère borné d'une suite convergente.
  - Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés (« composante par composante »...)
  - Suites extraites. Valeurs d'adhérence. Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
11. Comparaison des normes : normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

---

Dans le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'objectif de ce chapitre est d'étendre les notions topologiques (partie bornée, limites, continuité) vues en première année dans le cadre réel au cadre des espaces vectoriels. Nous poursuivrons ce chapitre dans le courant de l'année, avec le chapitre Topologie des espaces vectoriels normés.

## 1 Rappels sur les bornes supérieure et inférieure

$A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ . On appelle *borne supérieure de  $A$* , lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de  $A$ . Cette borne supérieure est notée  $\sup(A)$ . En première année, vous avez appris le théorème :

Toute partie non vide et majorée de réels admet une borne supérieure.

Supposons l'existence de  $\sup(A)$ . Par définition de  $\sup(A)$ , pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\sup(A) - \varepsilon$  n'est plus un majorant de  $A$ , et il existe  $x \in A$  tel que  $\sup(A) - \varepsilon < x \leq \sup(A)$ . Cette considération est extrêmement utile. On peut ainsi construire, en prenant  $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ , une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\sup(A)$ . En effet, les termes d'une telle suite vérifient :

$$\sup(A) - \frac{1}{n+1} < x_n \leq \sup(A)$$

et le théorème d'encadrement assure que  $\lim x_n = \sup A$ .

Pour justifier qu'un réel  $M$  est égal à  $\sup(A)$ , on peut souvent procéder en deux étapes :

1. D'une part, montrer que pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$ . Ainsi  $M$  est un majorant de  $A$ .
2. D'autre part, montrer que pour tout  $s < M$ , il existe  $x \in A$  tel que  $s < x$ .  
Ansi  $s < M$  n'est pas un majorant de  $A$ .

En résumé, on prouve bien que  $M$  est un majorant de  $A$  et que c'est le plus petit des majorants de  $A$ .

### Propriété 1

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha > 0$ . On considère  $\alpha A = \{\alpha x, x \in A\}$ . On a :

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$$

et, si la partie  $A$  admet un plus grand élément,  $\max(\alpha A) = \alpha \max(A)$ .

Enfin, on rappelle la notation  $\sup_X f$ .

Si  $f$  est une application d'un ensemble  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , majorée sur  $X$ , on note

$$\sup_X f = \sup_{x \in X} f(x) = \sup\{f(x), x \in X\}$$

$\sup_X f$  est le plus petit majorant des valeurs de  $f$  sur  $X$ .

## 2 Normes

### 2.1 définitions

#### Définition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle *norme* sur  $E$  toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés :

**Séparation :**  $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

**Homogénéité :**  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

**Inégalité triangulaire :**  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

On dit alors que  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé.

Remarques :

— L'homogénéité montre que si  $x = 0_E$ , alors  $N(x) = 0$ . En effet,  $N(0_E) = N(0 \cdot 0_E) = |0|N(0_E) = 0$ . La séparation peut donc aussi s'écrire

$$N(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0_E$$

— On a  $N(-x) = N(x)$ .

— Une norme est souvent notée non pas comme une application mais à l'aide d'un symbole comme  $\|\cdot\|$ .  $N(x) = \|x\|$  est la norme du vecteur  $x$ .

— Nous le verrons longuement, il peut y avoir plusieurs normes sur le même espace vectoriel ! Elles doivent alors avoir des notations différentes.

— La restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel  $F$  fait de ce dernier un espace vectoriel normé.

Par exemple, l'application  $x \mapsto |x|$  est une norme sur  $\mathbb{K}$  (où  $|x|$  est la valeur absolue de  $x$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et le module de  $x$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Et la valeur absolue est la norme induite sur  $F = \mathbb{R}$  par le module sur  $\mathbb{C}$ .

Autre exemple : dans un espace préhilbertien réel ( $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire), l'application  $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme, notée  $\|\cdot\|$ .

Une norme découlant d'un produit scalaire est appelée *norme euclidienne*.

### Définition - propriété 1

Un vecteur  $x$  de  $E$  est dit *unitaire* si sa norme vaut 1.

Étant donné un vecteur non nul  $x$  de  $E$ , le vecteur  $\frac{x}{\|x\|}$  est de norme 1.

Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . Par homogénéité de la norme, pour  $\lambda$  scalaire,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ . Donc  $\lambda x$  est unitaire si, et seulement si,  $|\lambda| = \frac{1}{\|x\|}$ .

Dans le cas d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, il existe donc deux vecteurs unitaires colinéaires à  $x$ , qui sont  $\frac{x}{\|x\|}$  et  $-\frac{x}{\|x\|}$ .

Exercice 1 :

1. Montrer que  $N(P) = |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$  définit une norme sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . Quelle est la norme du polynôme  $X - 3$ ? Donner un exemple de polynôme unitaire.
2. Montrer que  $N : P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$  est une norme sur  $\mathbb{C}[X]$ .

## 2.2 les inégalités triangulaires

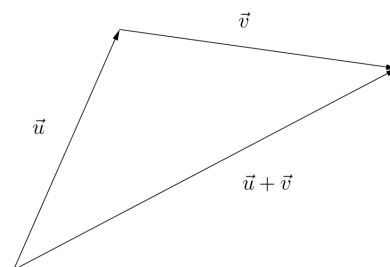
Pour  $u$  et  $v$  vecteurs de  $E$ , l'inégalité triangulaire est :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Cette inégalité s'interprète géométriquement en disant que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Avec une différence, c'est la même inégalité :

$$\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



### Propriété 2 – deuxième inégalité triangulaire

Pour  $x$  et  $y$  vecteurs de  $E$ , on a :

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\|$$

### Propriété 3

Pour  $x_1, \dots, x_n$  vecteurs de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  scalaires, on a l'inégalité triangulaire généralisée :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\|$$

## 2.3 exemples d'espaces vectoriels normés

### Définition - propriété 2 – espace $\mathbb{K}^n$ et normes usuelles

Pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in [1, n]} |x_k|$$

$\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$ .



N'oubliez pas les modules sous le carré pour  $\|\cdot\|_2$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Même chose dans la propriété suivante.

### Définition - propriété 3 – espace de fonctions continues

Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

$\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

La norme 1 est appelée *norme de la convergence en moyenne*.

La norme 2 est appelée *norme de la convergence (en moyenne) quadratique*.

La norme infinie est appelée *norme de la convergence uniforme*.

### Définition - propriété 4 – espace des fonctions bornées

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé et  $X$  un ensemble non vide.

Une fonction  $f : X \rightarrow E$  est *bornée* lorsqu'il existe un réel  $R \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x$  de  $X$ ,  $N(f(x)) \leq R$ .

L'ensemble  $\mathcal{B}(X, E)$  des applications bornées de  $X$  dans  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble  $\mathcal{F}(X, E)$ . On peut le munir de la norme infinie, ou *norme de la convergence uniforme*, donnée par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} N(f(x))$$

Par exemple, l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  des suites complexes bornées est muni de la norme infinie

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

### Propriété 4 – espace produit d'espaces normés

Étant donné  $p$  espaces vectoriels normés  $(E_i, N_i)$  avec  $1 \leq i \leq p$ , on peut munir l'espace vectoriel produit  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  de la norme  $N$  définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} N_i(x_i)$$

Par exemple, la norme infinie sur  $\mathbb{K}^n$  est la norme produit obtenue en considérant, sur  $\mathbb{K}$ , la norme  $x \mapsto |x|$ .

### 3 Un peu de topologie dans $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé

#### 3.1 distance

##### Définition 2

On appelle *distance* associée à la norme  $\|\cdot\|$  l'application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|y - x\|$$

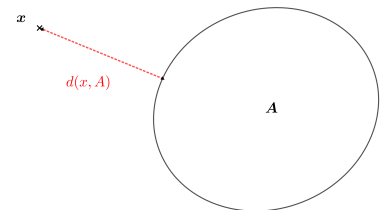
On a les propriétés suivantes pour la distance  $d$  :

- Séparation :  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- Symétrie :  $d(x, y) = d(y, x)$
- Inégalité triangulaire :  $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- La norme de  $x$  est sa distance au vecteur nul :  $\|x\| = d(x, 0_E)$
- On a encore une fois la seconde inégalité triangulaire  $\forall x, y, z \in E, |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ .

##### Définition 3 – distance à une partie

Pour  $A$  partie non vide de  $E$  et  $x$  dans  $E$ , on appelle *distance de  $x$  à  $A$* , et on note  $d(x, A)$ , la quantité :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\} = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$$



Exercice 2 : Montrer que  $d(\cdot, A) : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  est une application 1-lipschitzienne.

#### 3.2 boules

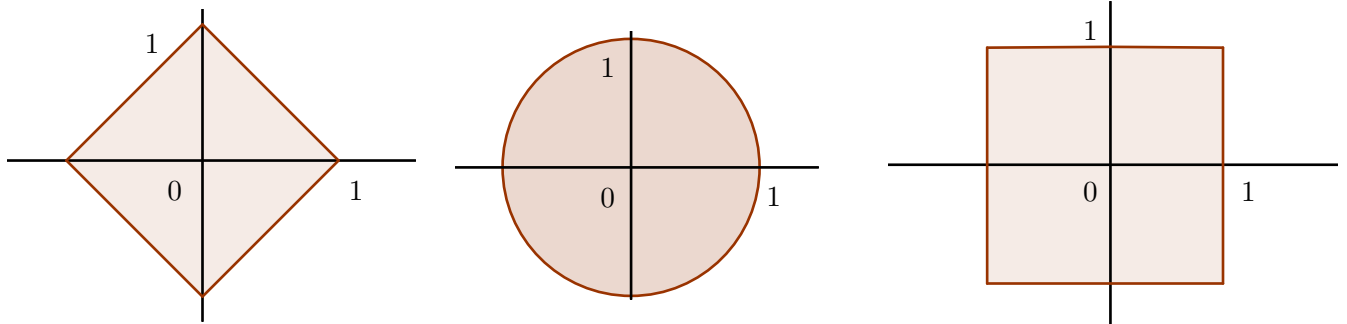
##### Définition 4

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $a \in E$  et  $r > 0$ . On appelle :

- *boule ouverte* de centre  $a$  et de rayon  $r$ , l'ensemble  $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ .
- *boule fermée* de centre  $a$  et de rayon  $r$ , l'ensemble  $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$ .
- *sphère* de centre  $a$  et de rayon  $r$ , l'ensemble  $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$ .

Pour  $a = 0$  et  $r = 1$ , on parle respectivement de boule unité ouverte, boule unité fermée et sphère unité.

Voici les trois boules unité fermées dans  $\mathbb{R}^2$  muni des normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  :



#### Définition - propriété 5

On dit qu'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé est *bornée* s'il existe une boule la contenant, ou, de manière équivalente,

$$\exists M > 0, \forall x \in A, \|x\| \leq M$$

#### Définition - propriété 6

• Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On dit que la suite  $(u_n)$  est bornée s'il existe  $R \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq R$$

L'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

• Soit  $X$  un ensemble et  $f : E \rightarrow X$  une application. On dit que  $f$  est bornée s'il existe  $R \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall x \in X, \|f(x)\| \leq R$$

L'ensemble des applications bornées est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(X, E)$ .

Une partie peut être bornée pour une norme sans l'être pour autant pour une autre! Une suite peut être bornée pour une norme et pas pour une autre!

Par exemple, on considère  $E = \mathbb{R}[X]$  et on définit deux normes sur  $E$  en posant, pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \quad N_2(P) = \max_{k \geq 0} |a_k|$$

On considère la suite  $(P_n)$  donnée par  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ .

On a  $N_1(P_n) = n + 1$  donc la suite  $(P_n)$  n'est pas bornée pour  $N_1$ . Et  $N_2(P_n) = 1$  donc la suite  $(P_n)$  est bornée pour  $N_2$ .

**Nous verrons cependant plus loin que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites bornées.**

### 3.3 parties convexes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé

Ici  $(E, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

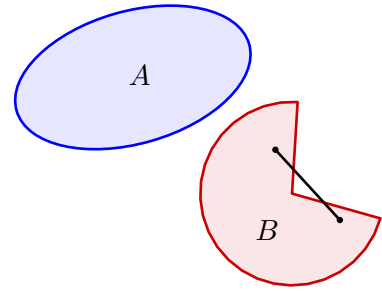
#### Définition 5

Une partie  $A$  de  $E$  est dite *convexe* si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in A$$

L'ensemble des points  $\{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}$  est appelé *segment*  $[x, y]$ .

Dire qu'une partie est convexe signifie qu'étant donné deux points de  $A$ , le segment reliant ces deux points est inclus dans  $A$ . Ci-contre,  $A$  est convexe et  $B$  ne l'est pas.



En première année, vous avez vu que les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

#### Propriété 5

Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

## 4 Suites dans un espace vectoriel normé

### 4.1 convergence et divergence d'une suite

$(E, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

#### Définition 6

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in E$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

On dit qu'elle diverge sinon.

Autrement dit, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si, et seulement si, la suite réelle  $(\|u_n - \ell\|)$  converge vers 0. La convergence d'une suite est liée à la norme choisie, comme le montre l'exemple suivant.

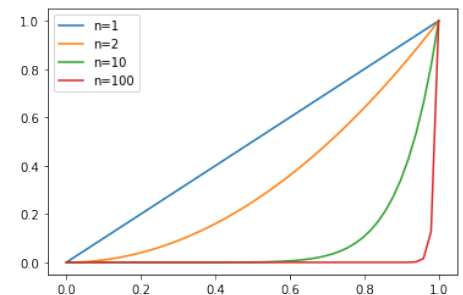
Considérons l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  que l'on peut munir des normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par  $f_n : t \mapsto t^n$ .

- La suite  $(f_n)$  converge vers la fonction nulle pour la norme  $\|\cdot\|_1$  puisque :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = 0$$

- La suite  $(f_n)$  ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  car

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} t^n = 1$$



**Nous verrons cependant plus loin que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes.**

Dans ce nouveau cadre des suites convergentes dans un espace vectoriel normé, nous retrouvons les propriétés suivantes, connues pour les suites numériques.

### Propriété 6

- La limite d'une suite  $u$ , lorsqu'elle existe, est unique, notée  $\lim u_n$ .
- Toute suite convergente est bornée.
- L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et pour  $u$  et  $v$  suites convergentes de  $E$  et  $\lambda$  réel,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

### Propriété 7 – convergence dans un espace produit

Soit  $(E_k, N_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille finie d'espaces vectoriels normés et  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  muni de la norme produit  $N$ .

La suite  $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(p)}) \in E$  converge vers  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in E$  pour la norme  $N$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite  $(u_n^{(k)})_n$  converge vers  $(\ell_k)$  pour la norme  $N_k$ .

Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge.

### Propriété 8 – convergence en dimension finie (admis)

**Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à celle de ses suites composantes dans une base.** Plus précisément, soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On peut écrire chaque terme dans la base  $\mathcal{B}$  à l'aide de ses coordonnées (ou composantes).

$$a_n = \sum_{k=1}^p a_n^{(k)} e_k$$

Étant donné  $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k \in E$ , il est équivalent de dire :

- la suite  $(a_n)$  converge vers  $\ell$
- pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite  $(a_n^{(k)})_n$  converge vers  $\ell_k$ .

Exemples :

- Une suite  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^p$  converge vers  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$  si et seulement si pour tout  $k$  compris entre 1 et  $p$ , la suite  $(x_n^{(k)})_n$  converge vers  $\ell_k$ .

$$\text{La suite } \left( \frac{1}{n^2 + 1}, \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right), \arctan(-n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \left( 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$$

- Une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  converge vers  $L \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  si et seulement si pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $((M_n)_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L_{i,j}$ .

$$\text{La suite de matrices de terme général } \begin{pmatrix} e^{-n} & \sin(n)/n \\ (n+1)/n & e^{-2n} \end{pmatrix} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## 4.2 valeurs d'adhérence

### Définition 7

On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante.

Remarque : Comme  $\varphi$  est strictement croissante, on a  $\varphi(k+1) - \varphi(k) > 0$ .

Comme  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi(k+1) - \varphi(k) \geq 1$ . Par sommation et télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\varphi(k+1) - \varphi(k)) \geq n \quad \text{et} \quad \varphi(n) - \varphi(0) \geq n$$

Il s'ensuit que  $\varphi(n) \geq n$ , et en particulier,  $\lim \varphi(n) = +\infty$ .

### Définition 8

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  un élément de  $E$  qui est la limite d'une suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Propriété 9

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.



Pour une suite convergente, la limite  $\ell$  éventuelle est donc l'unique valeur d'adhérence. Ainsi, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Si une suite converge, son unique valeur d'adhérence est sa limite mais la réciproque est fautive : une suite admettant une unique valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement.

Exemples :

1. La suite  $((-1)^n)$  admet deux valeurs d'adhérence et est divergente.
2. La suite  $(n|\sin(\frac{n\pi}{2})|)$  possède une unique valeur d'adhérence et est divergente.
3. La suite  $(n(-1)^n)$  n'admet aucune valeur d'adhérence.

Sur le thème des suites extraites, terminons par deux révisions de première année :

### Théorème 1 – théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

### Théorème 2 – théorème des suites extraites

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

La suite réelle  $(u_n)$  a pour limite  $a$  si et seulement si les deux suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont pour limite  $a$ .

## 5 Comparaison de normes


### Définition 9

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $N_2$  est équivalente à  $N_1$  s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

### Propriété 10

La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On peut en particulier dire sans ambiguïté que deux normes sont équivalentes plutôt que de dire que l'une est équivalente à l'autre.

 Exercice 3 : Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

1.  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$
2.  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$
3. On déduit de 1. et 2. que  $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_1$ .

Il en résulte que les normes 1, 2 et infinie sont équivalentes dans  $\mathbb{K}^n$ .

### Propriétés inchangées par utilisation d'une norme équivalente

L'équivalence des normes est une notion essentielle. Nous verrons dans les chapitres ultérieurs que bon nombre de propriétés topologiques de parties d'un espace vectoriel, de suites ou de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé restent inchangées si on change une norme en une norme équivalente, notamment :

- le caractère borné,
- la convergence/divergence et la limite des suites,
- la convergence/divergence et la somme des séries,
- les ouverts, les fermés, les voisinages, les intérieurs, les adhérences, la densité,
- la limite et la continuité des fonctions,
- la compacité,
- la connexité par arcs.

Exemple de démonstration : montrons que si  $(u_n)$  est une suite convergeant vers  $\ell$  au sens de la norme  $N_1$ , et que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes, alors  $(u_n)$  converge aussi vers  $\ell$  au sens de  $N_2$ .

Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in E, N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$ . Donc

$$0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq \alpha N_1(u_n - \ell)$$

et comme le membre de droite tend vers 0, le théorème d'encadrement nous permet de conclure  $\lim N_2(u_n - \ell) = 0$ , autrement dit  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  au sens de  $N_2$ .

Propriété 11 – comment montrer que deux normes ne sont pas équivalentes ?

Pour montrer que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  d'un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} = +\infty$$

Exercice 4 : À l'aide des fonctions  $f_n : t \mapsto t^n$ , montrer que les normes 1, 2 et infinie ne sont pas équivalentes dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

Théorème 3 – équivalence des normes en dimension finie (admis)

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ce résultat fondamental est provisoirement admis. Il nous assure que la convergence d'une suite en dimension finie ne dépend pas de la norme utilisée.

## 6 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Propriété 1

Démonstration dans le cas où  $\alpha > 0$  (le cas  $\alpha = 0$  résulte plus d'une convention qu'autre chose).

- Si  $A$  n'est pas majorée,  $\alpha A$  ne l'est pas non plus.  $\sup(\alpha A) = +\infty = \alpha \sup(A)$ .
- Supposons que  $A$  est majorée. D'une part, pour  $x \in A$ , on a  $x \leq \sup(A)$  et  $\alpha x \leq \alpha \sup(A)$ . Donc  $\alpha \sup(A)$  est un majorant de  $A$ .  
D'autre part, soit  $s < \alpha \sup(A)$ .  $\frac{s}{\alpha}$  n'est pas un majorant de  $A$ . Il existe  $x \in A$  tel que  $\frac{s}{\alpha} < x$ . On a  $s < \alpha x$ , donc  $s$  n'est pas un majorant de  $\alpha A$ .  
Donc pour  $s < \alpha \sup(A)$ ,  $s$  n'est pas majorant de  $\alpha A$ .  
Par ces deux points,  $\alpha \sup(A)$  est le plus petit des majorants de  $\alpha A$  :  $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ .

### Deuxième inégalité triangulaire (page 3)

$\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|-y\|$  par inégalité triangulaire.

Donc  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$ . En intervertissant les rôles de  $x$  et  $y$ , on a  $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$ .

### Propriété 2

- Soient  $x, y \in \mathbb{K}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
 $\|x\|_1 = 0$  si et seulement si  $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$  si et seulement si (une somme de positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls)  $|x_i| = 0$  pour tout  $i$ , si et seulement si  $x = 0_E$ .  
 $\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$   
Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$  donc en sommant,

$$\|x + y\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i|$$

et par linéarité de la somme,

$$\|x + y\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la norme  $\|\cdot\|_2$  découle du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .  
Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on pose, pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\tilde{x} = (|x_1|, \dots, |x_n|) \in \mathbb{R}^n$ . On s'aperçoit que  $\|x\|_2 = \|\tilde{x}\|_2$ . Pour obtenir les propriétés de séparation, homogénéité, inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{C}^n$ , on utilise ces mêmes propriétés, déjà établies, pour  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

- Soient  $x, y \in \mathbb{K}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
 $\|x\|_\infty = 0$  si et seulement si  $\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| = 0$  si et seulement si pour tout  $i$ ,  $|x_i| = 0$  si et seulement si  $x = 0_E$ .  
Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $|\lambda x_i| = |\lambda| \cdot |x_i|$  donc  $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$ .  
Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x + y\|_\infty$ , donc  $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

### Propriété 3

Démonstration facile pour  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour  $\|\cdot\|_2$  lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on reconnaît la norme euclidienne associée au produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ . Enfin, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on se ramène au cas réel en remarquant que  $\|f\|_2 = \|g\|_2$  où  $g = |f|$ .

### Propriété 5

Soient  $x$  et  $y$  dans une boule (ouverte ou fermée) de centre  $a$  et de rayon  $r$  et soit  $t \in [0, 1]$ . On écrit astucieusement :

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y - a\| &= \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \\ &\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| \leq \max(\|x-a\|, \|y-a\|) \end{aligned}$$

### Propriété 6

1. Si  $u_n$  converge vers  $\ell_1$  et vers  $\ell_2$ , par inégalité triangulaire

$$0 \leq \|\ell_1 - \ell_2\| \leq \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\|$$

et le membre de droite tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$ , puis  $\ell_1 = \ell_2$ .

2. Si  $\lim u_n = \ell$ , par inégalité triangulaire,  $0 \leq \|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\|$ . Le membre de droite tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, donc constitue une suite réelle bornée. Il existe  $R$  réel tel que

$$0 \leq \|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq R$$

3. Montrons que l'ensemble  $F$  des suites d'éléments de  $E$  convergentes est un sous-espace vectoriel de  $E^{\mathbb{N}}$ .  
 $F \subset E^{\mathbb{N}}$

La suite nulle est convergente, de limite 0. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_n - 0\| = \|0_E\| = 0 < \varepsilon$ .  
 Soient  $\lambda$  réel et  $u$  et  $v$  dans  $F$ , de limites respectives  $\ell_u$  et  $\ell_v$ . Par inégalité triangulaire,

$$0 \leq \|au_n + v_n - (a\ell_u + \ell_v)\| \leq |a| \cdot \|u_n - \ell_u\| + \|v_n - \ell_v\|$$

Par le fait que  $u$  et  $v$  sont dans  $F$ , le membre de droite tend vers 0. Par encadrement (propriété de suites réelles),  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|au_n + v_n - (a\ell_u + \ell_v)\| = 0$ . Autrement dit, la suite  $(au_n + b_n)$  converge vers  $a\ell_u + \ell_v$ .

### Propriété 7

- Supposons que la suite  $u$  converge pour la norme produit, vers  $\ell$ . Comme pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$0 \leq N_k((u_k)_n - \ell_k) \leq N(u_n - \ell)$$

on applique le théorème d'encadrement et on obtient  $\lim (u_k)_n = \ell_k$ . Chaque composante converge.

- Réciproquement, si chaque composante  $u_k$  de  $u$  est une suite convergeant vers  $\ell_k$ , alors on a

$$0 \leq \|u_n - \ell\| = \max(N_1((u_1)_n - \ell_1), \dots, N_p((u_p)_n - \ell_p)) \leq N_1((u_1)_n - \ell_1) + \dots + N_p((u_p)_n - \ell_p)$$

et le membre de droite est une suite réelle qui tend vers 0. Par le théorème d'encadrement,  $\lim \|u_n - \ell\| = 0$ , soit  $\lim u_n = \ell$ .

### Propriété 9

Utilisons le résultat déjà connu sur les suites réelles. Si  $\lim u_n = \ell$  et si  $(u_{\varphi(n)})$  est une suite extraite de  $u$ , alors la suite réelle  $(\|u_{\varphi(n)} - \ell\|)$  est une suite réelle, sous-suite de la suite réelle  $(\|u_n - \ell\|)$ . Cette dernière suite tend vers 0, donc toutes ses sous-suites tendent vers 0. Donc  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $\ell$ .

### Propriété 11

- Supposons qu'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} = 0$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes. Il existe  $\alpha > 0$  tel que pour  $x \in E$ ,  $\alpha N_1(x) \leq N_2(x)$ . On a

$$\alpha \leq \frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} \text{ et en faisant tendre } n \text{ vers } +\infty, \alpha \leq 0$$

- Supposons qu'il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} = +\infty$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes. Il existe  $\beta > 0$  tel que pour  $x \in E$ ,  $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ . On a

$$\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} \leq \beta \text{ et en faisant tendre } n \text{ vers } +\infty, +\infty \leq \beta$$