Intégrales généralisées

Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$

1. Savoir définir : $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et donner la valeur de $\int\limits_a^{+\infty} f = \int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ le cas échéant.
2. Pour f continue, dérivation de $x \mapsto \int\limits_x^{+\infty} f$.
3. Utilisation, quand f est continue, d'une primitive de f pour juger de la convergence de l'intégrale.
4. Intégrales de référence : intégrales de Riemann en $+\infty$ et intégrales exponentielles.

Intégrabilité sur $[a,+\infty[$

5. Savoir définir : $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ou encore « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ ».
6. Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
7. Théorèmes de comparaison : domination, équivalence.

Extension des notions aux intervalles quelconques, et propriétés

8. Intégrale convergente en a, en b.
9. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
10. Intégration par parties sur un intervalle quelconque.
11. Changement de variable.
12. Fonction intégrable en a, en b.
13. Adaptation des théorèmes de comparaison.
14. Inégalité triangulaire. Théorème de nullité de l'intégrale.
15. Intégrales de référence : intégrales de Riemann en un point.

Intégration des relations de comparaison
Intégration des relations de comparaison (domination, négligeabilité et équivalence), pour les intégrales partielles ou les restes. La fonction de référence est de signe constant.

---

f est une fonction de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Quand ce ne sera pas précisé, a désigne un réel ou $-\infty$, et b désigne un réel ou $+\infty$.

1 Quelques résultats de première année

En première année, il a été présenté l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, puis la généralisation à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Théorème 1 – théorème fondamental du calcul intégral

- Toute fonction continue sur un intervalle y admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
- Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Définition 1

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}.

La subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ est dite adaptée à f.

Par exemple, les fonctions continues et les fonctions en escalier sont continues par morceaux. Avec les notations précédentes, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est la somme des intégrales $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$, et est indépendante de la subdivision choisie.

Exercice 1 : Calculer $I_1 = \int_{-3/2}^{5/2} \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$ et $I_2 = \int_{-3/2}^{5/2} t \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$.

2 Convergence d'intégrales sur un intervalle semi-ouvert à droite

Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors *d'intégrales impropres* ou *généralisées.*

Définition 2

On dit que f est *continue par morceaux* sur l'intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux. On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Notre premier objectif est d'étudier la *convergence*, c'est-à-dire l'existence, d'intégrales du type $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t)} \mathrm{d}t$ ou $\int_1^{+\infty} e^{-3t} \, \mathrm{d}t$.

Soient a réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 3

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente si les *intégrales partielles* $\displaystyle\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ admettent une limite finie quand x tend vers b. La valeur de l'intégrale est alors notée $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$, ou $\int_{[a,b[} f$, et correspond à

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ diverge.

Définition 4

Dans le cas où l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on appelle *reste* la fonction R définie sur $[a,b[$ par :

$$R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $\quad \lim\limits_{x\to b} R(x) = 0.$

Converger a ici le sens d'exister. On dira « l'intégrale converge et vaut... » mais pas « l'intégrale converge ~~vers~~... ».

- Deux intégrales sont *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$, alors pour tout $c \in [a,b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Autrement dit, seul le point à problème, b, importe !
- Le vocabulaire est très ressemblant à celui du chapitre Séries, mais attention tout de même :

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = 0$$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_b f = 0$$

- Dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a,b]$, nous nous retrouvons avec deux définitions de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$: l'intégrale définie en première année, et l'intégrale qu'on vient de définir, limite des intégrales partielles. Heureusement, elles sont égales. La démonstration est en annexe.

Propriété 1 – intégrales de référence (1)

α est un réel.

Intégrales de Riemann en l'infini. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de Riemann en $b_0 \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_a^{b_0} \frac{1}{(b_0-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Intégrale exponentielle pour a réel, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$

Démonstration en classe.

Propriété 2 – lien avec une primitive

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et F une primitive de f.

- L'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet une limite finie en b.
- La fonction $\quad x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur $[a,b[$, de dérivée $-f$.

3 Convergence d'intégrales sur un intervalle semi-ouvert à gauche, sur un intervalle ouvert

Nous adaptons facilement la section précédente au cas d'une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b$. Voyons en situation.

Exercice 2 :

1. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{0} \sin(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer cette intégrale.

Propriété 3 – intégrales de référence (2)

Intégrales de Riemann en $a_0 \in \mathbb{R}$. $\quad \displaystyle\int_{a_0}^{b} \frac{1}{(t-a_0)^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad$ converge si et seulement si $\quad \alpha < 1$.

Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 5

Ici $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent quel que soit $c \in]a,b[$.

Si c'est le cas, pour avoir la valeur de l'intégrale, il n'y a plus qu'à additionner :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit donc de justifier l'existence de limites finies $\quad \displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^c f \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{y\to b^-} \int_c^y f$.

Exercice 3 : Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer si elles convergent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} t^3\,\mathrm{d}t$$

Remarques :

— Les intégrales de Riemann sont toujours divergentes lorsqu'on les étudie sur $[0,+\infty[$. En effet, en 0, elles convergent si et seulement si $\alpha < 1$, et en $+\infty$, elles convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

— Si $I =]a,b[$ est un intervalle **borné** et si f est continue par morceaux sur I et admet des limites finies en a et b, alors l'intégrale de f sur I converge.
En particulier, si une fonction f est continue sur $I =]a,b[$ et est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a,b]$, alors l'intégrale de f sur I converge.
Une telle intégrale est appelée *faussement impropre*. Par exemple, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4 Propriétés des intégrales convergentes

Pour couvrir les différents cas de figure, on considère I **un intervalle de** $\mathbb{R}$**,** $\mathbf{a} = \inf \mathbf{I}$, $\mathbf{b} = \sup \mathbf{I}$.

Propriété 4 – linéarité

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur I, d'intégrale convergente sur I, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Propriété 5 – fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Étant donné $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C})$, l'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent, et on a alors :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

Exercice 4 : Calculer, pour $\alpha > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 6 – positivité et stricte positivité de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

- Si f est positive sur I alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- Si $a < b$ et f est strictement positive sur I, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Propriété 7 – nullité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si f est continue, de signe constant sur I et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors : $\forall t \in I,\ f(t) = 0$.

Propriété 8 – croissance de l'intégrale

Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur I, d'intégrale convergente sur I.

Si $f \leqslant g$ sur I, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 9 – relation de Chasles

Soit f continue par morceaux sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge. Pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

5 Calcul intégral

5.1 intégration par parties

Supposons que $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, si $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

On commencera par intégrer entre a et x pour effectuer l'intégration par parties sur un segment avant de passer à la limite. Autrement dit, on mènera les calculs sur les intégrales partielles, puis on passera à la limite.

✎ Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente, et établir une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. En déduire la valeur de I_n.

5.2 changement de variable

Propriété 10 – Cas d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soient f une fonction continue sur I et $\varphi : [c, d] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\int\limits_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Dans la pratique, on mène les calculs sans revenir à la forme précédente.

Propriété 11

a et α désignent un réel ou $-\infty$, b et β désignent un réel ou $+\infty$.
Soit f continue sur $]a, b[$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$.

Les intégrales $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence :

— si φ est croissante, $\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

— si φ est décroissante, $\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u = -\int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Autrement dit, les intégrales avant et après changement de variables sont de même nature ; en cas de convergence, elles sont égales si φ est croissante, elles sont opposées si φ est décroissante.

Notez bien les différentes d'hypothèses à rédiger (quand on est sur un segment, on demande juste que le changement de variables soit de classe $\mathcal{C}^1$, tandis que sur un intervalle quelconque, le changement de variable doit être de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif et strictement monotone).

Recette : Conformément au programme, on applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels. Pour ma part, j'exigerai toujours au minimum le tableau de variations correspondant au changement de variables, avec les limites aux bornes.

$$t = \varphi(u) \qquad \mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

u	bornes connues
$t = \varphi(u)$	on trouve les bornes de t

u	on trouve les bornes de u
$t = \varphi(u)$	bornes connues

Exercice 6 :

1. Effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Effectuer le changement de variable $t = \sin^2 u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$.

6 Le cas particulier des intégrales de fonctions positives

Propriété 12

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ et **positive**.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a, b[$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

Conformément au programme, on s'autorisera alors à écrire $\int_a^b f = +\infty$ et un calcul montrant que $\int_a^b f < +\infty$ vaut preuve de convergence, toujours dans le cas où f est POSITIVE.

Théorème 2 – majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur I. Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

Par contraposée de ce résultat, nous avons aussi : si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Exercice 7 : Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

7 Fonctions intégrables et espace $L^1(I, \mathbb{K})$

Définition 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On dit que f est *intégrable* sur I ou que l'intégrale de f sur I *converge absolument* si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : pour une fonction de signe constant, la convergence absolue (l'intégrabilité) équivaut à la convergence de l'intégrale.

Propriété 13 – intégrales de référence (récapitulatif)

α, a, a_0, b_0 sont des réels avec $a > 0$ et $a_0 < b_0$.

Intégrales de Riemann en l'infini.

$x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de Riemann en a_0, $b_0 \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto \dfrac{1}{|x - b_0|^\alpha}$ est intégrable sur $[a_0, b_0[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

$x \mapsto \dfrac{1}{(x - a_0)^\alpha}$ est intégrable sur $]a_0, b_0]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Intégrale exponentielle $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.

Comme pour les séries, pour lesquelles la convergence absolue impliquait la convergence, nous avons le très utile résultat suivant.

Propriété 14 – inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

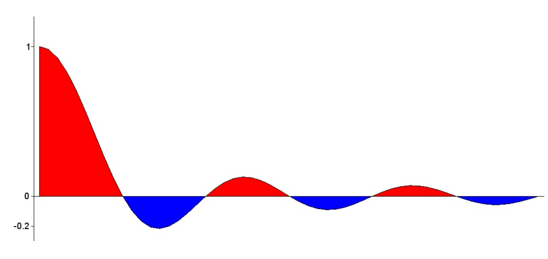
où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Remarque : la réciproque est fausse, il existe des fonctions dont l'intégrale sur I converge, mais ne converge pas absolument. On dit dans ce cas que l'intégrale est *semi-convergente*.

Exercice 8 : Montrer que les intégrales $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Exercice 9 : L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais ne converge pas absolument. Nous le montrons dans cet exercice.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. On pose $I_n = \int_0^{n\pi} |\frac{\sin(t)}{t}|\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire : $I_n \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\,\mathrm{d}t$ diverge.



Propriété 15

L'espace $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

8 Comment se ramener à une fonction de référence ?

Comme pour les séries, nous cherchons ici à nous ramener à des références pour établir la convergence, au moyen d'équivalences, dominations, négligeabilités.

Théorème 3 – domination-négligeabilité

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f \underset{b}{=} O(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f l'est aussi.
- En particulier, si $f \underset{b}{=} o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f l'est aussi.

Comme souvent dans ce chapitre, ce théorème et le suivant restent valables sur $]a, b]$. Nous utiliserons souvent la situation suivante, qui découle du théorème de négligeabilité :

> Si $f(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^\alpha})$ avec $\alpha > 1$, alors $\int\limits_a^{+\infty} f$ converge (absolument).

Théorème 4 – critère d'équivalence

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que $f \underset{b}{\sim} g$.
f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$.

Exercice 10 :

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, étudier la nature de $I_n = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^n - 1}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

9 Intégration des relations de comparaison

Propriété 16 – référence intégrable et reste

Soient f continue par morceaux sur $[a, b[$ et g **positive** et **intégrable** sur $[a, b[$.

- Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Propriété 17 – référence non intégrable et intégrales partielles

Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g **positive** et **non intégrable** sur $[a,b[$.

- Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 11 : Donner un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 12 : Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et de limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

Exercice 13 : À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

10 Approfondissement : l'intégrale Gamma d'Euler

Thème classique – Intégrales Gamma

Les intégrales $\Gamma(x)$ sont les intégrales données par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On a les propriétés :

$$\Gamma(x) \quad \text{converge si et seulement si} \quad x > 0$$

Autrement dit, le domaine de définition de la fonction Γ est $]0,+\infty[$. On a la relation :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ces résultats ne sont pas à apprendre. Vous pouvez les démontrer à titre d'exercice (corrigé en annexe).

11 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Coïncidence des deux définitions de l'intégrale (page 3)

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. f est bornée sur ce segment et il existe M réel tel que $|f| \leqslant M$. Pour $x \in [a,b]$, par relation de Chasles dans le cadre de l'intégration sur un segment,

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \int_a^x f &= \int_x^b f \\ \left| \int_a^b f - \int_a^x f \right| &\leqslant (b-x)M \text{ par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to b}(b-x)M = 0$, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to b} \int_a^x f = \int_a^b f$. Le membre de gauche est la nouvelle définition de l'intégrale, le membre de droite est l'ancienne. Les deux définitions sont bien égales.

Propriété 2

Pour $x \in [a,b[$, $\int_a^x f = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$, donc, facilement, $\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet une limite finie en b.

Notons $g : x \mapsto \int_x^b f$. On a

$$\forall x \in [a,b[, \quad g(x) = \lim_b F - F(x)$$

donc g est dérivable et $g' = -f$.

Propriété 4

Par exemple dans le cadre où $I = [a,b[$, la démonstration est facile en repassant aux intégrales partielles, pour lesquelles on a déjà établi en première année la linéarité de l'intégrale.

Propriété 6

Par exemple dans le cadre où $I = [a,b[$, la démonstration est facile en repassant aux intégrales partielles : $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale sur un segment), et en passant à la limite quand $x \to b$ dans une inégalité large.

Propriété 7

Dans le cadre où $I = [a,b[$. Comme f est continue, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de dérivée $f \geqslant 0$, donc croissante sur I. Par positivité de l'intégrale, $F \geqslant 0$. Enfin, $\lim_b F = 0$. Donc F est nulle sur I. En dérivant, $F' = f$ est nulle sur I.
On déduit de cette propriété que si f est continue, positive et non nulle sur I, alors $\int_I f > 0$.

Propriété 8

On applique la propriété 6 à $f - g$ et on utilise la linéarité.

Propriété 9

Démonstration dans le cas où $I = [a,b[$. On applique la relation de Chasles pour les intégrales partielles : $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$, et on fait tendre x vers b.

Changement de variables (propriétés 10 et 11)

- Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad [F(\varphi(t))]_c^d = [F(u)]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

- Démonstration dans le cadre où φ est strictement croissante et où l'intégrale est impropre (généralisée) en b ; φ réalise une bijection de $]\alpha,\beta[$ dans $]a,b[$ avec $a = \lim_{x\to\alpha} \varphi(x)$ et $b = \lim_{x\to\beta} \varphi(x)$. La bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement croissante sur $]a,b[$, d'après le théorème de la bijection. On se ramène une nouvelle fois à un segment en introduisant

$y \in [a, b[$. Il existe $x \in [\alpha, \beta[$ tel que $y = \varphi(x)$.

$$\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Quand $y \to b$, on a $x = \varphi^{-1}(y) \to \varphi^{-1}(b) = \beta$.

Le résultat du changement de variables reste vrai si f est seulement continue par morceaux (admis).

Propriété 12

On pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $x \leqslant y$, par positivité de l'intégrale ayant $f \geqslant 0$, on a $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Donc $F(y) - F(x) \geqslant 0$.

Ainsi $(x \leqslant y) \Rightarrow (F(x) \leqslant F(y))$ et F est croissante.
Si f est continue, on peut aussi rédiger ainsi : $\forall x \in [a, b[$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ donc F est croissante). Par le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b, et

- cette limite est finie si et seulement si F est majorée,
- cette limite est $+\infty$ si et seulement si F n'est pas majorée.

Théorème 2

On part de $0 \leqslant f \leqslant g$. Si $\int_a^b g$ converge, alors ses intégrales partielles sont majorées : il existe M réel tel que pour tout x dans $[a, b[$, $\int_a^x g \leqslant M$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^x f \leqslant \int_a^x g \leqslant M$$

Les intégrales partielles de $x \mapsto \int_a^x f$ sont donc majorées, et par la propriété précédente, $\int_a^b f$ converge.

Propriétés 14 et 15

Montrons que : $\int_a^b |f|$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge.
Premier cas : f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On introduit $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Avec $\begin{cases} 0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \\ 0 \leqslant f^- \leqslant |f| \end{cases}$ et le théorème de majoration, $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ convergent. On termine avec $f = f^+ - f^-$.

Deuxième cas : f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On utilise cette fois $0 \leqslant |\operatorname{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\operatorname{Im}(f)| \leqslant |f|$. avec le théorème de majoration, les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$ convergent absolument. Par le premier cas, ces intégrales convergent, puis $\int_a^b f$ converge.

Montrons que $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.
$L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. La fonction nulle est intégrable, d'intégrale nulle.
Soient λ réel, f et g dans $L^1(I, \mathbb{K})$. On a

$$|\lambda f + g| \leqslant |\lambda||f| + |g|$$

et on peut appliquer le théorème de majoration.

Théorèmes 3 et 4

- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est intégrable sur $[a, b[$, il existe $c \in [a, b[$ et $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, \quad |f(t)| \leqslant k|g(t)|$$

Par hypothèse d'intégrabilité de g, $\int_c^b k|g|$ converge. Par théorème de majoration (les fonctions sont bien positives), $\int_c^b |f|$ converge, et donc aussi $\int_a^b |f|$ converge. f est intégrable sur $[a, b[$.

- Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$ et on peut appliquer le premier point.

Propriété 16

Dans les trois cas, l'intégrabilité de f a déjà été établie (propriétés 3 et 4).
- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b[$, il existe $c \in [a, b[$ et $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, \quad |f(t)| \leqslant kg(t)$$

Par inégalité triangulaire, croissance de l'intégrale, linéarité de l'intégrale,

$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant k \int_x^b g$$

On a donc établi que $\int_x^b f = O(\int_x^b g)$ au voisinage de b.

- Supposons que $f = o(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, \quad |f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$

Comme précédemment,

$$\left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \varepsilon \int_x^b g$$

On a donc établi que $\int_x^b f = o(\int_x^b g)$ au voisinage de b.

- Supposons que $f \sim g$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b[$. Alors $f - g = o(g)$ au voisinage de b. Par le point précédent, $\int_x^b (f - g) = o(\int_x^b g)$, et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_x^b f - \int_x^b g = o(\int_x^b g)$$

Propriété 17

Comme g est positive et non intégrable, on a $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x g = +\infty$.
- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b[$, il existe $c \in [a, b[$ et $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, \quad |f(t)| \leqslant kg(t)$$

On a

$$|\int_a^x f| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^c |f| + k \int_c^x g \leqslant \int_a^c |f| + k \int_a^x g$$

puis

$$0 \leqslant \frac{|\int_a^x f|}{\int_a^x g} \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g}}_{\text{de limite nulle en } b\text{, donc bornée}} + k$$

Donc $|\int_a^x f| = O(\int_a^x g)$.

- On suppose que $f = o(g)$ au voisinage de b et que g est positive et intégrable sur $[a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, \quad |f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} g(t)$$

On a

$$|\int_a^x f| \leqslant \int_a^x |f| \leqslant \int_a^c |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_c^x g \leqslant \int_a^c |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g$$

puis

$$0 \leqslant \frac{|\int_a^x f|}{\int_a^x g} \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g}}_{\text{de limite nulle en } b} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $d \in [c, b[$ tel que pour $x \in [d, b[$, $\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et $0 \leqslant \frac{|\int_a^x f|}{\int_a^x g} \leqslant \varepsilon$.

Donc $|\int_a^x f| = o(\int_a^x g)$.

- On écrit $f - g = o(g)$ pour se ramener au cas précédent.

Exercice sur les intégrales Gamma en page 10

- **convergence**

Notons f la fonction $t \mapsto t^{\nu-1}e^{-t}$. Comme $f(t) = e^{(\nu-1)\ln t}e^{-t}$ pour $t > 0$, f est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\Gamma(\nu)$ n'est « impropre » qu'en 0 et $+\infty$.

On a $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\nu}}$. Les fonctions en jeu sont continues positives sur $]0, 1]$. Par le théorème de comparaison pour des intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\nu}}\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale est une intégrale de Riemann en un point. Elle est convergente si et seulement si $1 - \nu < 1$ soit $\nu > 0$.

On en déduit que pour $\nu \leqslant 0$, l'intégrale $\Gamma(\nu)$ diverge. Et on suppose donc désormais : $\nu > 0$.

Par croissances comparées :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^{\nu+1}e^{-t} = 0 \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par le théorème de comparaison pour des intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, pour $\nu > 0$, l'intégrale $\Gamma(\nu)$ converge. Et finalement :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \Gamma(\nu) \text{ converge si et seulement si } \nu > 0}$$

- **relation entre $\Gamma(\nu + 1)$ et $\Gamma(\nu)$**

Soit $\nu > 0$. On a : $\Gamma(\nu + 1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On a l'idée d'une intégration par parties, mais on rappelle qu'on ne peut l'effectuer que sur un segment !
Soit $A \in]0, 1]$. On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$ données par :

$$u(t) = t^{\nu} \quad u'(t) = \nu t^{\nu-1} \quad v(t) = -e^{-t} \quad v'(t) = e^{-t}$$

$$\begin{aligned} \int_A^1 t^{\nu}e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^{\nu}e^{-t}\right]_A^1 - \int_A^1 -\nu t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= A^{\nu}e^{-A} - e^{-1} + \nu \int_A^1 t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Les intégrales $\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(\nu+1)$ convergent, et de plus $\lim\limits_{A\to 0} A^\nu = 0$ car $\nu > 0$. On peut donc faire tendre A vers 0 et obtenir :

$$\int_0^1 t^\nu e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-1} + \nu \int_0^1 t^{\nu-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Soit $B \in [1, +\infty[$. On effectue une intégration par parties avec les mêmes fonctions que précédemment :

$$\begin{aligned}\int_1^B t^\nu e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^\nu e^{-t}\right]_1^B - \int_1^B -\nu t^{\nu-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -B^\nu e^{-B} + e^{-1} + \nu \int_1^B t^{\nu-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Les intégrales $\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(\nu+1)$ convergent, et de plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{B\to +\infty} B^\nu e^{-B} = 0$. On peut donc faire tendre B vers $+\infty$ et obtenir :

$$\int_1^{+\infty} t^\nu e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-1} + \nu \int_1^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

On somme les relations (1) et (2). Par la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t}\,\mathrm{d}t = \nu \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$$