Remise en route – Algèbre linéaire

1 Systèmes linéaires

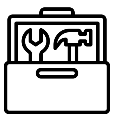
Un système linéaire peut admettre :

— soit aucune solution,

— soit une infinité de solutions,

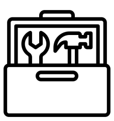
— soit une unique solution. On dit alors que c'est un système de Cramer.

Exercice 1 : Donner un exemple pour chacun des cas de figure.



Savoir-faire
Un système linéaire homogène est un espace vectoriel. Il faut savoir le présenter sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.

Exercice 2 : Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$ sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille.



Savoir-faire
La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système écrit matriciellement $AX = Y$ est un système de Cramer.
Dans ce cas, $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.

Exercice 3 : Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode de Cramer.

2 Calcul matriciel

La formule du coefficient en ligne i et colonne j d'un produit de deux matrices doit être connue !

$[AB]_{i,j} =$

Exercice 4 : Redémontrer l'associativité $(AB)C = A(BC)$ pour A, B, C matrices carrées d'ordre n.

3 Familles

Exercice 5 : Montrer que $(X(X-1), X(X+1), X+3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 : Montrer que $(1, X-2, \ldots, (X-2)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

4 Sous-espaces vectoriels

Savoir-faire
Il faut savoir montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence :

— par la méthode des trois points,

— par la méthode de l'espace vectoriel engendré, quand c'est possible.

Exercice 7 : Montrer que F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels, où

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ f'' + f = 0 \right\} \\ F_2 &= \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_n - u_{n+1} \right\} \end{aligned}$$

Savoir-faire
Il faut savoir montrer l'égalité de deux espaces vectoriels :

— par double-inclusion,

— en dimension finie, par une inclusion et l'égalité des dimensions.

5 Représentations matricielles d'une application linéaire, noyau, image

Dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'un espace de dimension finie n, en notant A et B leur représentation matricielle relativement à une base de E, on a les correspondances suivantes.

objets	représentation matricielle
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x) \in E$	AX
$f + g$	$A + B$
$f \circ g$	AB
f^{-1} (si $f \in \mathrm{GL}(E)$)	A^{-1}

Savoir-faire
Il faut savoir déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire.

- Dans le cas où l'on dispose d'une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'ensemble de départ, on a la formule très efficace :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

- Pour trouver le noyau, une possibilité est de résoudre $f(x) = 0$ en utilisant $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x) = 0$.

Exercice 8 : Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{pmatrix}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
2. Donner une représentation matricielle de f.
3. Déterminer le noyau de f.