Programme des colles MP
Semaine 9 : 2 au 7 décembre 2024

1 Cours

Révisions : Savoir énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
Suites et séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: suites de fonctions (convergence simple, uniforme, et propriétés), séries de fonctions (convergence simple, uniforme, normale, et propriétés).
Suites et séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie : adaptation au cas où $f : A \subset E \to F$, avec E et F espaces vectoriels normés de dimension finie, ou $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ selon les propriétés abordées.

2 Méthodes, exercices

- Être au point sur le vocabulaire et sur les notations : $f_n(x)$ ou f_n ? $|f_n(x)|$ mais $\|f_n\|_\infty$...
- Savoir établir une convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment.
- Savoir montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément : par étude de fonction ou par l'absurde.
- Avoir révisé le théorème spécial des séries alternées, utile à certaines séries de fonctions.

3 Questions de cours

1. Savoir refaire l'exercice 12 de la B.E.O.
   (a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
   (b) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?
2. Savoir refaire l'exercice 14 de la B.E.O.
   (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.
3. Savoir refaire l'exercice 53 de la B.E.O. On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4x^4}$.
   (a) i. Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   ii. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. n$^{\text{os}}$ 8, 9, 10, 11, 16, 17, 48

Corrigé exercice 12

1. Soit $x_0 \in [a,b]$. Prouvons que f est continue en x_0.
Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence uniforme, il existe un entier N tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow (\forall x \in [a,b]\,, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon)$.
En particulier pour $n = N$, on a $\forall x \in [a,b]\,, |f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon$. (*)
Or la fonction f_N est continue en x_0 donc $\exists\, \alpha > 0$ tel que :
$\forall x \in [a,b]\,, |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leqslant \varepsilon$. (**)
D'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$.
Alors d'après (*) et (**),
$\forall x \in [a,b]\,, |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$.
On en déduit que f est continue en x_0.

2. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 1 alors que g est discontinue en 1.
D'après la question précédente, on en déduit que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0,1]$.

Corrigé exercice 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a,b]$.
On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.
On a :
$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x.$$
Or, $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_\infty$.
Donc $\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b ||f_n - f||_\infty \mathrm{d}x = (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty$. (*)
Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Donc d'après (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, donc converge simplement sur $[a,b]$.
On pose alors, également, $\forall x \in [a,b]$, $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers S.
De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a,b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.
On en déduit que S est continue sur $[a,b]$ d'après le théorème de transmission de continuité.
Et d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Ce qui signifie que $\displaystyle\sum\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur le segment $[a,b]$ permet d' intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\displaystyle\int_a^b\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Rédaction possible pour les 5/2

La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R=1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\subset\,]-1,1[$.

De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x\longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

Rédaction pour tous

Pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$, on a $|x^n|\leqslant(\frac{1}{2})^n$ puis en notant $u_n : x\mapsto x^n$ et $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur le segment $[0,\frac{1}{2}]$, on a $0\leqslant\|u_n\|_\infty\leqslant(\frac{1}{2})^n$. La série géométrique $\sum(\frac{1}{2})^n$ converge, donc la série numérique $\sum\|u_n\|_\infty$ converge. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,\frac{1}{2}]$. Par le théorème d'intégration terme à terme (démontré au b.), on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}.$$

Corrigé exercice 53

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Si $x=0$, alors $f_n(0)=0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n(0)$ converge.

Si $x\neq0$, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^4x^3}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n(x)$ converge.

Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<b$.

• Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

$\forall x\in[a,b]$, $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).

Donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\dfrac{b}{n^4a^4}$.

De plus, $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

• Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant1}f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$\forall x\in[a,+\infty[$, $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{x}{n^4x^4}=\dfrac{1}{n^4x^3}\leqslant\dfrac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).

Donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}\leqslant\dfrac{1}{n^4a^3}$.

De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1, +\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1, +\infty[$.
On en déduit que f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \geqslant f_n(\dfrac{1}{n}) \geqslant \dfrac{1}{2n} \geqslant 0$.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Donc par théorème de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{1 - 3n^4x^4}{(1+n^4x^4)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty\right[$.
f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\|f_n\|_{\infty,,\mathbb{R}^+} = f_n(\dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}) = \dfrac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_{\infty,,\mathbb{R}^+}$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$. (1)
$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0, +\infty[$.
Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty, 0[$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.
D'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de double limite, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.