Programme des colles MP
Semaine 9 : 27 novembre au 2 décembre 2023

1 Cours

Anneaux et arithmétique : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

— Être à l'aise sur les degrés des polynômes, coefficients dominants, coefficient du terme de degré 0. Par exemple, degré, coefficient dominant, coefficient du terme constant de $\prod_{k=1}^{n}(kX - e^k)$. Dans la relation suivante où P est un polynôme non nul de degré d :

$$(2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X) = \lambda P(X)$$

l'identification des coefficients au niveau de X^{d+1} conduit sans gros calculs à $d = 2$.

— Avoir progressé sur les polynômes de Lagrange (question de cours ci-dessous ; DM n° 6 ; ou encore B.E.O. n° 90 déjà travaillé en khôlles ; ou encore B.E.O. n° 87).

— Savoir s'aider de Python pour trouver les valeurs propres, espaces propres et diagonaliser une matrice : `[L, P]= al.eig(A)`.

— Être parfaitement à l'aise dans les calculs dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Savoir traiter des questions d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (divisibilités) en repassant dans des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Savoir trouver l'inverse d'un élément inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec une relation de Bézout. Avec questions guidées, exercices utilisant un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $m \wedge n = 1$.

3 Questions de cours

1. (Révision) Détermination de l'inverse d'une matrice concrète par la méthode du pivot : exercice résolu au verso. Savoir utiliser Python (avec éventuellement aide sur le nom des bibliothèques) pour déterminer P^{-1}.

2. (Révision, extrait du DM n° 6) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

   (a) Pour k et i éléments de $\{0, 1, \ldots, n\}$, calculer $P_k(x_i)$.
   (b) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P_k$.

3. $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.

4. *(sauf pour les élèves en difficulté)* Démonstration du théorème d'Euler , avec comme corollaire, le petit théorème de Fermat.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n° 86, n° 87, n° 94.

Méthode du pivot pour déterminer P^{-1}

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. P est inversible si, et seulement si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le système matriciel $PX = Y$ est de Cramer. On a alors $X = P^{-1}Y$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. On résout $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, qui équivaut successivement à :

$$PX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2t & = & a \\ & & y & & & + & t & = & b \\ & & y & + & z & & & = & c \\ x & - & y & + & z & + & t & = & d \end{array}\right. \underset{L_4 \leftarrow L_1 - L_4}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2t & = & a \\ & & y & & & + & t & = & b \\ & & y & + & z & & & = & c \\ & & 2y & & & + & t & = & a-d \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & z & + & y & + & 2t & = & a \\ & & z & + & y & & & = & c \\ & & & & y & + & t & = & c \\ & & & & 2y & + & t & = & a-d \end{array}\right. \underset{L_4 \leftrightarrow L_4 - 2L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & z & + & y & + & 2t & = & a \\ & & z & + & y & & & = & c \\ & & & & y & + & t & = & c \\ & & & & & - & t & = & a-d-2b \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{par remontée}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} t & = -a + 2b + d \\ y & = a - d - b \\ z & = -a + b + c + d \\ x & = 3a - 4b - c - 2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al
P = np.array([
    [1, 1, 1, 2],
    [0, 1, 0, 1],
    [0, 1, 1, 0],
    [1, -1, 1, 1]
])
print(al.inv(P))
```