Programme des colles MP
Semaine 8 : 25 au 30 novembre 2024

1 Cours

Développements limités : à savoir par cœur!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Calcul différentiel : Chapitre sections 1 à 4 comprises.

2 Méthodes, exercices

— Incontournable ! Savoir étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et la classe $\mathcal{C}^1$ de fonctions du type $f(x,y) = \begin{cases} \ldots & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \ldots & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Maîtriser l'astuce courante : $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ qui conduit à $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ (même chose pour y).

— Savoir mettre en œuvre la règle de la chaîne :

- (plus théorique) Si γ est dérivable en t et f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla(f)(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$$

- (plus concret) Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ et on a plus simplement :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

— Savoir primitiver. Par exemple :

- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(y)$.
- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = xC(y) + D(y)$.
- La solution générale sur U de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(x) + D(y)$.

— Savoir présenter la définition d'une application différentiable, et exprimer $\mathrm{d}f(a)(h)$ (méthode page 10).

— Savoir écrire le développement limité à l'ordre 1, à l'ordre 2 en un point a de f définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

3 Questions de cours

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel et préciser le cas d'égalité. Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, le gradient de f en a donne la direction « de plus forte pente » : $\nabla f(a)$ est colinéaire au vecteur unitaire u selon lequel la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ est maximale.

2. En effectuant le changement de variables $\begin{cases} x &= u \\ y &= \frac{w}{u} \end{cases}$, chercher les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

3. B.E.O. numéro 57.
   (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
      i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

ii. Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».

(b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 33, 52, *(5/2 uniquement)* 58.

Corrigé exercice 57

1. (a) f est continue en $(0,0)$ lorsque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$ soit

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

$\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ (espace de dimension finie) .

(b) f est différentiable en $(0,0)$ lorsque : il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que au voisinage de $(0,0)$,

$$f(x,y) = f(0,0) + L(x,y) + o(\|(x,y)\|)$$

2. On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|(x,y)\|$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|$ (*).

(a) $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto xy(x^2-y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Continuité en (0,0) :

On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x|.|y| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$.

(b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad (**)$$

Existence des dérivées partielles en $(0,0)$:
$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
De même, $\forall\, y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$, donc $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$.
Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

D'après (*) et (**), pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \leqslant \frac{x^4|y| + 4x^2|y|^3 + |y|^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leqslant \frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 6\|(x,y)\|$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.