Programme des colles MP
Semaine 8 : 20 au 24 novembre 2023

1 Cours

Réduction (1) : tout le chapitre.
Anneaux et arithmétique : révisions et compléments sur les anneaux (calculs dans un anneau, groupe des unités, sous-anneau, corps, morphisme d'anneaux, anneau intègre, idéal d'un anneau commutatif, idéal engendré par un élément).

2 Méthodes, exercices

— Savoir déterminer les éléments propres d'une matrice : racines de χ_M et résolution de $MX = \lambda X$ pour avoir $E_\lambda(M)$.
— Savoir diagonaliser M dans le cas où elle est diagonalisable.
— Maîtriser la présentation des projecteurs et symétries en reliant « F_1 et F_2 » aux espaces propres.

3 Questions de cours

1. Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
2. Exercice n° 73 de la B.E.O. (recopié ci-dessous).
3. Savoir refaire l'exercice fait en TD : trouver les valeurs propres et le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ sans gros calculs (pas de calcul de déterminant).
4. L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles d'un anneau A est un groupe pour la multiplication.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. numéros 67 (révision), 69 (révision), 70, 72, 73, 74, 75, 83.

Énoncé exercice 73 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

Corrigé exercice 73

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A = \{-2, 3\}$.
   Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :
   $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $ND = DN \iff \begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \iff N$ diagonale.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D.
C'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$.
Donc, l'espace des matrices commutant avec A est $C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
donc $\dim C(A) = 2$.
Pour le justifier, on peut vérifier que : $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & C(A) \\ (a, b) & \longmapsto & P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.
De plus, $(\mathrm{I}_2 \in C(A)$ et $A \in C(A))$ donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A) \subset C(A)$.
De plus, $\dim C(A) = \dim \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

On en déduit que $C(A) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A) = 2$.