Programme des colles MP
Semaine 7 : 13 au 17 novembre 2023

1 Cours

Déterminants (révisions) : révisions de MPSI. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Déterminants de Vandermonde.
Réduction (1) : sections 1 à 6, c'est-à-dire : Éléments propres d'un endomorphisme en dimension quelconque, éléments propres en dimension finie, polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre, diagonalisabilité, trigonalisabilité.

2 Méthodes, exercices

— Être bien à l'aise dans les calculs de déterminants, en particulier pour le calcul des polynômes caractéristiques.
— Savoir montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par une application linéaire.
— Savoir déterminer les éléments propres d'une matrice : racines de χ_M et résolution de $MX = \lambda X$ pour avoir $E_\lambda(M)$. Savoir diagonaliser M dans le cas où elle est diagonalisable.

3 Questions de cours

1. Si u et w commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par w.
2. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
   Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit, χ_{u_F}, divise χ_u. En corollaire :
   - Pour toute valeur propre λ, on a
   $$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$$
   - En particulier, si λ est racine simple de χ_u ou χ_A, alors $\dim E_\lambda = 1$.
3. Exercice n° 67 de la B.E.O. (recopié ci-dessous).
4. Exercice n° 69 de la B.E.O. (recopié ci-dessous).

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. numéros 70, 73, 83.

Énoncé exercice 67 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé exercice 67 $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M = X(X^2 + ca - ba - bc)$.
Premier cas : $ca - ba - bc < 0$

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$

Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.
Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$

Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$ (M n'est donc pas trigonalisable, et donc pas diagonalisable).
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

Énoncé exercice 69 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé exercice 69

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
Donc $\mathrm{rg}A = 3$.
Deuxième cas : $a = 0$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}A = 2$.

Troisième cas : $a = -1$
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.
Or $\det A = 0$ donc $\mathrm{rg}A \leqslant 2$.
On en déduit que $\mathrm{rg}A = 2$.

2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1+a & \lambda+1 \end{vmatrix}$.
Donc, en développant par rapport à la première colonne,
$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
Les racines de χ_A sont $a+1$, $-a$ et -1.
$a + 1 = -a \iff a = -\dfrac{1}{2}$.
$a + 1 = -1 \iff a = -2$.
$-a = -1 \iff a = 1$.
Ce qui amène aux quatre cas suivants :

Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
Alors A admet trois valeurs propres disctinctes.
Donc A est diagonalisable.
Deuxième cas : $a = 1$
$\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
Donc A est diagonalisable.
Autre méthode :

A est symétrique réelle donc diagonalisable.
Troisième cas : $a = -2$

Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, -1 est valeur propre de A, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.
Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.
Quatrième cas : $a = -\dfrac{1}{2}$
$\chi_A = (X - \dfrac{1}{2})^2(X+1)$.

$$A - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes de $A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.