Programme des colles MP
Semaine 7 : 18 au 23 novembre 2024

1 Cours

Fonctions vectorielles : tout le chapitre. L'étude des arcs paramétrés n'est pas au programme.

2 Méthodes, exercices

— Savoir montrer des inégalités à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
— Savoir dériver des fonctions de la forme $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$, $t \mapsto \det(M(t))$ (on revient à la multilinéarité du déterminant sur les colonnes ou les lignes de M).
— Savoir utiliser le théorème des sommes de Riemann (révisions personnelles).

3 Questions de cours

1. (Reprise du concours blanc ; questions indépendantes)
   — Donner un équivalent de $\ln(\frac{n+1}{n}) - \frac{1}{n}$ et en déduire que la série $\sum \ln(\frac{n+1}{n}) - \frac{1}{n}$ converge. En déduire qu'il existe une constante réelle γ telle que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \to +\infty$$
   — Montrer que la fonction $t \mapsto (\ln t)\, e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
   — Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (qui se prononce « dzêta »). Montrer que pour tout $s > 1$, $\zeta(s)$ est bien défini et vérifie
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$
   (La comparaison série-intégrale est à effectuer ; aucune propriété ne la remplace.)
   En déduire un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.
   — Savoir donner, sans démonstration mais en ayant bien compris, les dimensions des espaces vectoriels suivants : matrices carrées d'ordre n, matrices diagonales d'ordre n, matrices triangulaires supérieures, matrices symétriques, matrices antisymétriques.
2. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou bien les accroissements finis) que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$.
3. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que pour $x \leqslant 0$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. numéros 3, 4.