Programme des colles MP
Semaine 6 : 6 au 10 novembre 2023

1 Cours

Déterminants : révisions de MPSI. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Déterminants de Vandermonde.
Compléments d'algèbre linéaire : Sommes et sommes directes de p sous-espaces vectoriels de E. Sous-espace stable par un endomorphisme. Matrices dans des bases *adaptées*.
Nous avons aussi révisé, pour P polynôme et $a_1, \dots, a_r \in K$ distincts deux à deux :

$$(P(a_1) = 0,\ P(a_2) = 0,\ \dots P(a_r) = 0) \Leftrightarrow (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_r) \text{ divise } P$$

$$\Big(P(a) = 0,\ P'(a) = 0,\ \dots P^{(k-1)}(a) = 0\Big) \Leftrightarrow (X - a)^k \text{ divise } P$$

2 Méthodes, exercices

— Sans excès de technicité, être bien à l'aise dans les calculs de déterminants.
— Savoir déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire f quand on a une de ses représentations matricielles.
— Étant donnée une projection, savoir retrouver sur un schéma l'image ($\operatorname{Im} p = F_1$, le noyau $\ker p = F_2$, l'espace des invariants). Savoir rechercher l'image et le noyau d'un projecteur p, et donner sa matrice dans une base adaptée.
— Pour une symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2, avoir compris comment trouver F_1 et F_2 par le calcul (avec appui sur un schéma pour mémoriser). Savoir donner la matrice dans une base adaptée.
— Savoir montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par une application linéaire.

3 Questions de cours

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, D_n est le déterminant de la matrice d'ordre n comportant des 3 en diagonale, des 2 en sur-diagonale et des 1 en sous-diagonale. Calculer D_n (réponse $2^{n+1} - 1$) en utilisant des développements par rapport à des lignes ou colonnes.
2. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on appelle *déterminant de Vandermonde* le déterminant de la matrice d'ordre $n + 1$ suivant :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$
On a $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
3. B.E.O. n°64 (images, noyaux pour f et f^2, somme directe) (recopié ci-dessous).
4. B.E.O. n°90 (polynômes de Lagrange concrets) (recopié ci-dessous).
5. Savoir montrer par analyse-synthèse la propriété de cours : étant donnés $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et p applications linéaires $u_1, \dots, u_p$ où pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ pour laquelle chaque restriction $u_{|E_i}$ égale u_i.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n° 59 (questions 1 et 2), B.E.O. n° 60, B.E.O. n° 71, B.E.O. n° 87 (pour les plus à l'aise).

Énoncé exercice 64 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f \quad$ (*)
   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a,b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$. Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2 \quad$ (**)
   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \iff \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$. Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$$
   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$. Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$, c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. $\quad$ (***)
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. $\quad$ (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Énoncé exercice 90 $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Corrigé exercice 90

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.
   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.
   Enfin, $\dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big) = \dim\big(\mathbb{K}^3\big) = 3$ donc Φ est bijective.
   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2\,[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base. Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $\big(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)\big) = (1,0,0)$. Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3)\,|L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.
3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.
4. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = (1,3,1)$. Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
   On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
   Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.