Programme des colles MP
Semaine 6 : 11 au 16 novembre 2024

1 Cours

Révisions d'analyse : développements limités usuels, primitives usuelles.
Intégrales généralisées : tout le chapitre !

2 Méthodes, exercices

— (révisions) Équivalents, développements limités sans technicité excessive, développements asymptotiques simples à partir de développements limités usuels.

— Calculs d'intégrales sur un segment. Intégration par parties, changement de variable.

3 Questions de cours

1. Polynômes de Lagrange. Soient $a_1, \dots, a_m$ complexes distincts. Pour $j \in [\![1, m]\!]$,

$$L_j = \prod_{k \in [\![1,m]\!],\, k \neq j} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

   (a) Visualiser le polynôme L_j et donner son degré et ses racines.
   (b) Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_m)$ est une base de $\mathbf{C}_{m-1}[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme P de $C_{m-1}[X]$ dans cette base. En particulier, quelles relations obtient-on pour $P = 1$, pour $P = X$?

2. Montrer que $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donner la norme associée. Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

3. Intégrales de référence. α est un réel.

   Intégrales de Riemann en l'infini. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

   Intégrales de Riemann en $b_0 \in \mathbf{R}$.
   $\displaystyle\int_a^{b_0} \frac{1}{(b_0 - t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

   Intégrale exponentielle pour a réel, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$

4. « Théorème de nullité de l'intégrale » (démonstration dans le cas où f est positive).

   Soit f une fonction continue sur $I = [a, b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Si f est continue, de signe constant sur I et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors : $\forall t \in I,\ f(t) = 0$.

5. Pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^n}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que u_n est bien défini.

6. Montrer que $f : t \mapsto \left(\dfrac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

7. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

8. B.E.O. n° 26 (recopié ci-dessous).

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
BEO numéro 1 (suites équivalentes, développement asymptotique), numéro 25 (convergence dominée), numéro 28 (intégrabilité).

Énoncé exercice 26
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Corrigé exercice 26
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
   Or $n \geqslant 1$, donc $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (intégrabilité de Riemann).
   Par le théorème d'équivalence, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. (a) $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ car $1+t^2 \geqslant 1$.
   Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et clairement positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Je rappelle que les continuités par morceaux ne sont pas exigées à l'écrit.
   i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t>0 \\ 1 & si\ t=0 \end{cases}$.
   De plus, f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall t \in [0,+\infty[\,, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
   En effet φ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par équivalence φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et donc sur $[0,+\infty[$.
   Par le théorème de convergence dominée, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0.
3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
   Par le théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$.