

1 Cours

Espaces vectoriels normés et séries vectorielles : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

- Savoir montrer qu'une application est une norme.
- (révisions) Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire et en déduire la norme euclidienne euclidienne associée.
- Savoir rédiger proprement une majoration relative à $\|\cdot\|_\infty$.
- Savoir montrer par l'absurde que 2 normes ne sont pas équivalentes.

3 Questions de cours

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$.
2. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$.
3. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$.
4. $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
5. Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.
6. Dans $\mathbf{K}^n$, savoir mener des calculs prouvant que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Quel théorème assurera leur équivalence sans aucun calcul ?
7. Dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
8. (Semaine 7 uniquement) B.E.O. n° 61.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. n° 54 questions 1, 2a et 2b (mais pas 2.c.), n° 37 questions 1a et 1b. et 2.

Énoncé exercice B.E.O. 61 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$. Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1$, $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

Corrigé exercice 61

1. On remarque que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|A\| \geq 0$.

- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$.

Comme $\forall (i,j) \in ([1,n])^2, |a_{i,j}| \geq 0$, on en déduit que $\forall (i,j) \in ([1,n])^2, |a_{i,j}| = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$.

Donc $A = 0$.

- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\lambda a_{i,j}| \\ &= \max\{|\lambda| |a_{i,j}|, (i,j) \in [1,n]^2\} \\ &\quad \text{pour } \alpha \geq 0, \max(\alpha B) = \alpha \max B \\ &= |\lambda| \max\{|a_{i,j}|, (i,j) \in [1,n]^2\} \\ &= |\lambda| \|A\| \end{aligned}$$

- Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

On a $\forall (i,j) \in ([1,n])^2, |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$.

On en déduit que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Posons $C = AB$.

On a $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $\forall (i,j) \in ([1,n])^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

Donc, $\forall (i,j) \in ([1,n])^2, |c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\| \|B\| = n \|A\| \|B\|$.

On en déduit que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$. (*)

Pour tout entier naturel $p \geq 1$, notons (P_p) la propriété : « $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$ ».

Prouvons que (P_p) est vraie par récurrence.

Pour $p = 1$, $\|A^1\| = n^0 \|A\|^1$, donc (P_1) est vraie.

Supposons la propriété (P_p) vraie pour un rang $p \geq 1$, c'est-à-dire $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$.

Prouvons que (P_{p+1}) est vraie.

$\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\|$ donc, d'après (*), $\|A^{p+1}\| \leq n \|A\| \|A^p\|$.

Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\|A^{p+1}\| \leq n \|A\| n^{p-1} \|A\|^p = n^p \|A\|^{p+1}$.

On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.

3. On a $\forall p \in \mathbb{N}^*, \left\| \frac{A^p}{p!} \right\| \leq \frac{1}{n} \frac{(n \|A\|)^p}{p!}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \frac{x^p}{p!}$ converge, donc $\sum \frac{(n \|A\|)^p}{p!}$ converge.

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge.