Programme des colles MP
Semaine 5 : 14 au 19 octobre 2024

1 Cours

Espaces vectoriels normés et séries vectorielles (partie 1, sans topologie).

2 Méthodes, exercices

— Savoir montrer qu'une application est une norme.
— (révisions) Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire et en déduire la norme euclidienne euclidienne associée.
— Savoir rédiger proprement une majoration relative à $\|.\|_\infty$.
— Savoir montrer par l'absurde que 2 normes ne sont pas équivalentes.

3 Questions de cours

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
3. $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.
5. Dans $\mathbb{K}^n$, savoir mener des calculs prouvant que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Quel théorème assurera leur équivalence sans aucun calcul ?
6. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
7. B.E.O. n° 61.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n° 54 questions 1, 2a et 2b, n° 37 questions 1a et 1b.

Énoncé exercice B.E.O. 61 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|.\||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$. Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente. Est-elle convergente ?

Corrigé exercice 61

1. On remarque que $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geqslant 0$.
   - Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$.

   Comme $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| \geqslant 0$, on en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$.
   Donc $A = 0$.

   - Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

   $$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda a_{i,j}| \\ &= \max\{|\lambda|\,|a_{i,j}|\,,\ (i,j) \in \llbracket 1,n\rrbracket^2\} \\ &\quad \text{pour } \alpha \geqslant 0,\ \max(\alpha B) = \alpha \max B \\ &= |\lambda| \max\{|a_{i,j}|\,,\ (i,j) \in \llbracket 1,n\rrbracket^2\} \\ &= |\lambda|\,\|A\| \end{aligned}$$

   - Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

   On a $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   On en déduit que $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
   Posons $C = AB$.
   On a $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.
   Donc, $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|c_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\|\,\|B\| = n\,\|A\|\,\|B\|$.
   On en déduit que $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$. (*)
   Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, notons (P_p) la propriété : « $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$ ».

   Prouvons que (P_p) est vraie par récurrence.
   Pour $p = 1$, $\|A^1\| = n^0\,\|A\|^1$, donc (P_1) est vraie.
   Supposons la propriété (P_p) vraie pour un rang $p \geqslant 1$, c'est-à-dire $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_{p+1}) est vraie.
   $\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\|$ donc, d'après (*), $\|A^{p+1}\| \leqslant n\,\|A\|\,\|A^p\|$.
   Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\|A^{p+1}\| \leqslant n\,\|A\|\,n^{p-1}\,\|A\|^p = n^p\,\|A\|^{p+1}$.
   On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.
3. On a $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\dfrac{A^p}{p!}\right\| \leqslant \dfrac{1}{n}\dfrac{(n\,\|A\|)^p}{p!}$.

   Or, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum \dfrac{x^p}{p!}$ converge, donc $\sum \dfrac{(n\|A\|)^p}{p!}$ converge.

   Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, donc $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ converge.