Programme des colles MP
Semaine 5 : 16 au 20 octobre 2023

1 Cours

Python : Algorithmes incontournables (recherche de la présence d'une valeur dans une liste, (recherche de la présence d'un mot dans un texte), recherche du maximum, du minimum dans une liste, fonction renvoyant un indice en lequel la valeur est maximale.
Complexité.
Recherche de la position d'un élement dans une liste triée par dichotomie.
Il est conseillé, mais non exigible, de connaître un algorithme de tri d'une liste.
Listes de listes pour une « matrice » : savoir programmer la somme des éléments de la diagonale, une somme suivant une ligne, suivant une colonne.

Groupes : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

En plus d'exercices sur les groupes ou d'une programmation Python, il peut être posé :

— un exercice sur les intégrales généralisées faisant intervenir de l'intégrabilité, des encadrements, des intégrations par parties, des changements de variables,

— un exercice utilisant une comparaison série-intégrale.

3 Questions de cours

1. Écrire une fonction en Python renvoyant la valeur maximale d'une liste L.
2. Écrire une fonction en Python renvoyant un indice réalisant le maximum dans une liste L.
3. L'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G.
4. H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.
5. Ici $n \neq 0$. Savoir présenter $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et calculer le symétrique d'un élément. Démonstration : $\overline{k}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.
6. *Pour les 5/2 et Mathis, Victor, Hadrien, Ryan, Marc.* Tout groupe monogène est :
   — soit infini, isomorphe à $\mathbb{Z}$,
   — soit fini, isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où n est le cardinal du groupe. Autrement dit, tout groupe cyclique est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où n est le cardinal du groupe.
7. *Pour les autres étudiants :* (questions extraites du DS n°2)
   Savoir montrer à l'aide d'une comparaison série-intégrale que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
   On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :
   $$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \mathrm{d}t$$
   (a) i. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini, et que $u_n > 0$.
   ii. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'elle converge.
   (b) i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$. **Les intégrations par parties sont rédigées, comme toujours, sur un segment.**
   ii. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.