Programme des colles MP
Semaine 4 : 7 au 12 octobre 2024

1 Cours

Séries numériques : tout le chapitre (révisions).
Familles sommables et procédés de sommation : tout le chapitre.

Les deux chapitres ne doivent pas être mélangés. Exemples de rédaction :

- La série $\sum(\frac{1}{3})^k$ converge car il s'agit d'une série de référence géométrique de raison géométrique de raison $\frac{2}{3}$ qui est dans $]-1,1[$. Et sa somme vaut $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.
- La famille $(\frac{1}{2})^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}}$ est à termes positifs. En travaillant dans $[0,+\infty]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2})^{|k|} &\underset{\text{paquets}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k\leqslant -1}(\frac{1}{2})^{|k|} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2})^k + \sum_{j\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{2})^j \\
&\quad \text{les séries géométriques de raison } \frac{1}{2} \in]-1,1[\text{ convergent} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 3 < +\infty
\end{aligned}$$

Donc la famille $((\frac{1}{2})^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2 Méthodes, exercices

— Ayant une majoration du reste d'une série convergente par une étude mathématique (par exemple le théorème spécial des séries alternées, mais pas nécessairement), mettons :

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

savoir programmer en Python le calcul approché de la somme de la série avec une précision donnée.

— Savoir effectuer une interversion de sommations avec le théorème de Fubini.
Par exemple, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

— Sommations par paquets (indices pairs-impairs, ou autres).

3 Questions de cours

1. B.E.O. n° 5 (recopié au verso).
2. B.E.O. n° 46 (recopié au verso).
3. Application du théorème du produit de Cauchy à deux séries exponentielles, à deux séries $\sum x^k$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n° 6 (séries), n° 7 (séries).

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leqslant 1$. On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge. Donc , par théorème de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue, décroissante sur $[2, +\infty[$ donc $\forall k \in [\![3, n]\!]$,
   $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$

   - Premier sous-cas : $\alpha = 1$ On reprend : $\int\limits_2^n \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n-1} f(k)$, donc $\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = +\infty$. La série $\sum f(k)$ diverge donc dans ce cas.

   - Deuxième sous-cas, qui s'appuie sur le cas précédent : $\alpha \in]0, 1[$
     On remarque que pour $n \geqslant 2$, $0 < (\ln n)^\alpha \leqslant \ln n$, ce qui permet de relier au cas précédent :
     $$0 \leqslant \frac{1}{n\ln n} \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$
     La série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (c'est le cas $\alpha = 1$) donc par le théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ diverge.

   - Dernier sous-cas : $\alpha > 1$
     On reprend cette fois l'encadrement : $\sum\limits_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int\limits_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et on primitive f.
     $$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(\ln n)^{\alpha-1}}$$
     $$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}$$
     La suite $(S_n) = \left(\sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\right)$ est donc majorée. Elle est aussi croissante ($S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geqslant 0$). Donc la suite (S_n) converge. Donc $\sum f(k)$ converge.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.}$$

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

   Au voisinage de $+\infty$,

$$\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.

   Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

   Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Énoncé exercice 46

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.

   On pose $w_n = v_n - \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ de sorte que $v_n = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + w_n$.

   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (rédigez le critère spécial des séries alternées) et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge (rédigez le théorème de domination avec $w_n = O(\frac{1}{n^2})$). Donc par somme de séries convergentes, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.

   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et $\frac{1}{n} \geqslant 0$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.