Programme des colles MP
Semaine 4 : 9 au 13 octobre 2023

1 Cours

Séries numériques et vectorielles : tout le chapitre.
Familles sommables et procédés de sommation : tout le chapitre.

Les deux chapitres ne doivent pas être mélangés. Exemples de rédaction :

> - La série $\sum(\frac{1}{3})^k$ converge car il s'agit d'une série de référence géométrique de raison géométrique de raison $\frac{2}{3}$ qui est dans $]-1,1[$. Et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.
> - La famille $(\frac{1}{2})^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}}$ est à termes positifs. En travaillant dans $[0,+\infty]$, on a :
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2})^{|k|} &\underset{\text{paquets}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k\leqslant -1}(\frac{1}{2})^{|k|} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\frac{1}{2})^k + \sum_{j\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{2})^j \\ &\quad \text{les séries géométriques de raison } \frac{1}{2} \in]-1,1[\text{ convergent} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3 < +\infty\end{aligned}$$
>
> Donc la famille $(\frac{1}{2})^{|k|})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2 Méthodes, exercices

— Ayant une majoration du reste d'une série convergente par une étude mathématique (par exemple le théorème spécial des séries alternées, mais pas nécessairement), mettons

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

savoir programmer en Python le calcul approché de la somme de la série avec une précision donnée.

— Savoir effectuer une interversion de sommations avec le théorème de Fubini. Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

— Sommations par paquets (pairs, impairs ou autres).

3 Questions de cours

1. Chapitre Séries vectorielles : savoir refaire **en ayant bien compris** l'exercice sur l'exponentielle de matrices (recopié au verso).
2. B.E.O. n° 89 (recopié au verso).
3. Application du théorème du produit de Cauchy à deux séries exponentielles, à deux séries $\sum x^k$.

Exercice sur l'exponentielle de matrices

On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$, on pose $N(A) = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que N définit une norme sur E. On la note $\|.\|$ par la suite.
2. Vérifier que pour A et B dans E, on a $\|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$. Par récurrence, on obtient alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leqslant \|A\|^k$$

3. Montrer que la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge. Comment appelle-t-on et note-t-on sa somme ?

B.E.O. CCINP Exercice 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Corrigé exercice 89

1. On pose $Z = z^k - 1$.
   $Z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
   c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2})}$
   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.
   Donc le module de Z est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$.
   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   S est donc la partie imaginaire de $T = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$.
   Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}$.
   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
   On en déduit que $T = \dfrac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\ \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}$.
   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ $(n \geqslant 2)$, on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.
