Programme des colles MP
Semaine 3 : 2 au 6 octobre 2023

1 Cours

Séries numériques et vectorielles : tout le chapitre. Remarque : les familles sommables feront l'objet d'une autre khôlle.

2 Méthodes, exercices

- (Travail personnel) Révision des D.L. et équivalents !
- Révisions sur les suites numériques récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Représentation graphique (avec aide de la première bissectrice), récurrences, théorème de convergence monotone et utilisation de la relation pour obtenir la valeur de ℓ.
- Savoir montrer qu'une série concrète converge par référence à une série du cours (Riemann, géométrique, série exponentielle) et un théorème de comparaison. Exemples : $\sum \ln(1 - \frac{1}{n^2})$, $\sum \frac{\ln n}{n}$, $\sum \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ ...
- Savoir effectuer des télescopages.
- Maîtriser la technique de comparaison série-intégrale avec une fonction monotone (page 5).

3 Questions de cours

1. Démonstration du théorème des séries alternées, y compris le signe du reste R_n et une majoration de $|R_n|$.

2. Montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par deux méthodes :
   - avec une comparaison série-intégrale
   - avec le théorème de sommation d'une relation de comparaison, cas convergent.

3. B.E.O. n° 6 (recopié au verso).

4. B.E.O. n° 46 (recopié au verso).

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication).
Exercice 7 (théorème d'équivalence des séries).
Exercice 43 (suite récurrente réelle d'ordre 1).
Exercice 61 (norme et exponentielle de matrices).

B.E.O. CCINP Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge. *Indication* : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} /\ \forall n \geqslant N,\ |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$
   Prenons $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell| \leqslant \frac{1-\ell}{2}$.
   Et donc, $\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+\ell}{2}$.
   On pose $q = \frac{1+\ell}{2}$. On a donc $q \in]0,1[$. On a alors $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \leqslant q u_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-N} u_N$. Or $\sum\limits_{n\geqslant N} q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} \sum\limits_{n\geqslant N} q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N} q^n$ converge car $q \in]0,1[$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{n^n}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$.
   Donc $\sum u_n$ converge.

B.E.O. CCINP Exercice 46

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.
   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{8n^2} + O(\frac{1}{n^3}) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O(\frac{1}{n^3})$.
   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right)$.
   Donc $v_n = \frac{3\pi}{8}\frac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées) et $\sum v_n - \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (par critère de domination), donc par somme $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.