Programme des colles MP
Semaine 23 : 2 au 5 avril 2024

1 Cours

Optimisation : tout le chapitre.

2 Révisions

— Chapitre Endomorphismes d'un espace euclidien.

— Chapitres Réduction.

3 Questions de cours

1. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un OUVERT $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \nabla f(a) = 0$$

   Il s'agit d'une condition nécessaire et pas suffisante pour obtenir un extremum (au choix, $f(x,y) = x^2 - y^2$ ou $f(x,y) = x^3 + y^2$).

2. $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz$ sur $\mathbf{R}^3$.
   (a) Donner le gradient de f, puis la matrice hessienne, en (x,y,z).
   (b) Montrer que f admet un unique point critique, qu'on déterminera, et montrer à l'aide de la matrice hessienne qu'il s'agit d'un extremum local.
   (c) À l'aide d'une mise sous forme canonique, montrer qu'il s'agit d'un extremum global.

3. Dans $E = \mathbf{R}^2$, on considère $f(x,y) = x + y$, sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ et on cherche à optimiser f sous cette contrainte.
   (a) Montrer que f admet un minimum et un maximum sous la contrainte.
   (b) Déterminer, par la méthode de Lagrange, la liste des points candidats à être extrêmum de f sous la contrainte.
   (c) Conclure.