

Programme des colles MP
Semaine 22 : 25 au 29 mars 2024

1 Cours

Calcul différentiel : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

— Savoir écrire le développement limité à l'ordre 1, à l'ordre 2 en un point a de f définie sur un ouvert de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R} .

— Savoir gérer la continuité et la classe \mathcal{C}^1 de fonctions du type $f(x, y) = \begin{cases} \dots & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \dots & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Maîtriser l'astuce courante : $x^2 \leq x^2 + y^2$ qui conduit à $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ (même chose pour y).

— Savoir mettre en œuvre la règle de la chaîne :

- (plus théorique) Si γ est dérivable en t et f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

- (plus concret) Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et on a plus simplement :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

3 Questions de cours

1. Pour f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbf{R}^2 à valeurs dans \mathbf{R} , le gradient de f en a donne la direction « de plus forte pente » : $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire u selon lequel la dérivée directionnelle $D_u f(a)$ est maximale.

2. En effectuant le changement de variables $\begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - u \end{cases}$, résoudre :

$$(E) : 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

3. B.E.O. numéro 57.

(a) Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

- Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
- Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

(b) On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 33, 52, 58.

Corrigé exercice 57

1. (a) f est continue en $(0, 0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < \alpha \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.
 $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur \mathbb{R}^2 puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^2 (espace de dimension finie).
- (b) f est différentiable en $(0, 0) \iff \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) /$ au voisinage de $(0, 0)$,
 $f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + o(\|(x, y)\|)$.
 Remarque : Comme \mathbb{R}^2 est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

2. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 .

On remarque que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x, y)\|$ et $|y| \leq \|(x, y)\|$ (*).

- (a) $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto xy(x^2 - y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 Continuité en $(0, 0)$:

On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \cdot |y| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \cdot |y| \leq \|(x, y)\|^2$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$ et f est continue en $(0, 0)$.

- (b) f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur \mathbb{R}^2 et sont continues sur \mathbb{R}^2 .
 f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad (**)$$

Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0; \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ existe et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

$$\text{De même, } \forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0, \text{ donc } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$:

D'après (*) et (**), pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{x^4 |y| + 4x^2 |y|^3 + |y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{6 \|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6 \|(x, y)\|$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{6 \|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6 \|(x, y)\|$$

$$\text{Donc } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ et } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.

Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur \mathbb{R}^2 , donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .