

Programme des colles MP
Semaine 21 : 24 au 29 mars 2025

1 Cours

Anneaux et arithmétique : révisions et compléments sur les anneaux (calculs dans un anneau, groupe des unités, sous-anneau, corps, morphisme d'anneaux, anneau intègre, idéal d'un anneau commutatif, idéal engendré par un élément). Chapitre jusqu'à la page 9 incluse.

2 Révisions $\triangle!$

- Développements limités, développements asymptotiques.
- Suites dans un espace vectoriel normé. Révisions de première année sur les suites.
- Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

3 Méthodes, exercices

- Être parfaitement à l'aise dans les calculs dans l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Savoir traiter des questions d'arithmétique dans \mathbf{Z} (divisibilités) en repassant dans des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Savoir trouver l'inverse d'un élément inversible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec une relation de Bézout.

4 Questions de cours

1. Soit x un élément de l'anneau A . L'ensemble xA est le plus petit idéal de A qui contient x .
 2. \bar{k} est inversible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si, et seulement si, $k \wedge n = 1$. Corollaire : $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si, et seulement si, p est premier.
 3. Démonstrations « modernisées » (a, b, c, p sont des entiers) :
 - Lemme d'Euclide : si p premier divise ab alors p divise a ou p divise b (passage dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$).
 - Lemme de Gauß : si a divise bc et $a \wedge b = 1$ alors a divise c (passage dans $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$).
 - Si $a \wedge n = 1$ et $b \wedge n = 1$ alors $ab \wedge n = 1$ (travail dans $U(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$).
 - Petit théorème de Fermat (travail dans $U(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$).
-