Programme des colles MP
Semaine 20 : 17 au 22 mars 2025

1 Cours

Optimisation : tout le chapitre.
Groupes : tout le chapitre.

2 Révisions ⚠

— Intégrales généralisées.

— Intégrales à paramètres.

3 Questions de cours

1. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{R}^2$ et soit a un point critique de f.
   - Si $\det(H_f(a)) > 0$, f admet un extremum local en a.
     Il s'agit d'un minimum local si $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, et d'un maximum local sinon.
   - Si $\det(H_f(a)) < 0$, f n'admet pas d'extremum en a (en réalité, on a un point col en a, mais cela, on l'admet).
   - Si $\det(H_f(a)) = 0$, on ne peut pas conclure par cette approche.

2. Dans $E = \mathbf{R}^2$, on considère $f(x, y) = x + y$, sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ et on cherche à optimiser f sous cette contrainte.
   (a) Montrer que f admet un minimum et un maximum sous la contrainte.
   (b) Déterminer, par la méthode de Lagrange, la liste des points candidats à être extrêmum de f sous la contrainte.
   (c) Conclure.

3. Ici $n \neq 0$. Savoir présenter $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, l'addition dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et calculer le symétrique d'un élément.
   Démonstration : $\overline{k}$ est un générateur de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si, et seulement si, $k \wedge n = 1$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

Optimisation : B.E.O. n° 56.
Groupes : B.E.O. n° 78 (une seule question).