

Programme des colles MP
Semaine 20 : 11 au 15 mars 2024

1 Cours

Fonctions vectorielles : tout le chapitre.

Equations différentielles : chapitre « Révisions de MPSI ».

2 Méthodes, exercices

- Savoir montrer des inégalités à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (MPSI) :
 - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène,
 - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
 - savoir trouver des solutions particulières par la méthode de la variation de la constante.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (MPSI) :
 - connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène dans le cas complexe et dans le cas réel,
 - avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
 - savoir trouver des solutions particulières dans trois situations : second membre polynomial, second membre Ae^{rx} , second membre $B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$.
- Exercices sur les intégrales à paramètre qui conduisent à une équation différentielle. Par exemple (exercice 3 feuille n° 17) :

$$\text{Soient } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que g est bien définie et continue sur \mathbf{R}^+ .
2. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}_+^* et solution de l'équation différentielle :
 $y' - 2xy = -2I$.

3 Questions de cours

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou bien les accroissements finis) que pour tout réel x , $|\sin x| \leq |x|$.
2. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que pour $x \leq 0$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $f : t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur \mathbf{R} et calculer $f'(t)$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 3, 4, 30, 31, 32, 42.