Programme des colles MP
Semaine 2 : 25 au 29 septembre 2023

1 Cours

Espaces vectoriels normés (partie 1, sans topologie).

2 Méthodes, exercices

— Savoir montrer qu'une application est une norme.

— (révisions) Savoir retrouver en moins de 40 secondes l'expression du terme en ligne i et colonne j de la matrice produit $M \times N$ où M et N sont deux matrices de taille compatible.

— (révisions) Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire et en déduire la norme euclidienne euclidienne associée.

— Savoir montrer par l'absurde que 2 normes ne sont pas équivalentes.

3 Questions de cours

1. Démonstration de la deuxième inégalité triangulaire en admettant la première.
2. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.
3. $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes.
6. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geqslant n$.
7. B.E.O. n° 61 questions 1 et 2 (recopiées au verso).

Énoncé exercice B.E.O. 61 questions 1 et 2

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$. Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.

Corrigé exercice 61

1. On remarque que $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geqslant 0$.
   i- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| = 0$.

   Comme $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| \geqslant 0$, on en déduit que $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j}| = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$.
   Donc $A = 0$.
   ii- Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   $\|\lambda A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda a_{i,j}| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |\lambda|\,|a_{i,j}| = |\lambda| \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}| = |\lambda|\,\|A\|$.
   iii- Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   On a $\|A+B\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j} + b_{i,j}|$.
   Or, $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
   On en déduit que $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.
2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
   Posons $C = AB$.
   On a $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ avec $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.
   Donc, $\forall\,(i,j) \in (\llbracket 1,n\rrbracket)^2$, $|c_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \|A\|\,\|B\| = n\,\|A\|\,\|B\|$.
   On en déduit que $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$. (*)
   Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, notons (P_p) la propriété : $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.

   Prouvons que (P_p) est vraie par récurrence.
   Pour $p = 1$, $\left\|A^1\right\| = n^0\,\|A\|^1$, donc (P_1) est vraie.
   Supposons la propriété (P_p) vraie pour un rang $p \geqslant 1$, c'est-à-dire $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
   Prouvons que (P_{p+1}) est vraie.
   $\left\|A^{p+1}\right\| = \|A \times A^p\|$ donc, d'après (*), $\left\|A^{p+1}\right\| \leqslant n\,\|A\|\,\|A^p\|$.
   Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\left\|A^{p+1}\right\| \leqslant n\,\|A\|\,n^{p-1}\,\|A\|^p = n^p\,\|A\|^{p+1}$.
   On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.