Programme des colles MP
Semaine 19 : 10 au 15 mars 2025

1 Cours

Endomorphismes d'un espace euclidien : Tout le chapitre.

2 Questions de cours

1. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) u conserve la norme : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (b) u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (c) u conserve les bases orthonormées : pour $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   L'assertion (1) constitue la définition d'une *isométrie vectorielle* de E.
2. L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal et noté $\mathrm{O}(E)$.
3. Pour u endomorphisme de E, u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, u est bijectif et $u^* = u^{-1}$.
4. Soit p un projecteur de E. $\ker p = (\mathrm{Im}\, p)^\perp$ (autrement dit, p est un projecteur orthogonal) $\Leftrightarrow$ p est un endomorphisme autoadjoint.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

Matrices symétriques : B.E.O. 66, 68, 92.
Adjoints : B.E.O. 63.
Isométries vectorielles : B.E.O. 78.